

可分距離化可能空間，被覆次元と埋め込み，関数空間

ナンブキトラ

2026 年 6 月 28 日

目次

1	準備	1
2	関数空間と埋め込み	3
3	普遍空間	6

1 準備

定義 1. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ 内の有限個の点 $e_1, \dots, e_m$ が**アフィンの独立**であるとは $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ が $\sum_{i=1}^m t_i = 0$ と $\sum_{i=1}^m t_i \cdot e_i = 0$ を満たしているならば， $t_1 = \dots = t_m = 0$ を満たす時にいう．これは $e_2 - e_1, \dots, e_m - e_1$ が線型独立であることと同値である．また， $\mathbb{R}^l$ 内の有限個の点 $w_1, \dots, w_m$ の**アフィン結合**とは m この実数 $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ であって $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ を満たすものを使って $\sum_{i=1}^m t_i \cdot w_i$ と表される点のことである．もしも $w_1, \dots, w_m$ がアフィンの独立であるのならばこれらのアフィン結合の係数は一意的であることに注目しよう．また $w_1, \dots, w_m$ が張る**アフィン部分空間** $\text{Aff}(w_1, \dots, w_m)$ とは， $w_1, \dots, w_m$ のアフィン結合全体の集合のことである． $\text{Aff}(w_1, \dots, w_m)$ は $w_2 - w_1, \dots, w_m - w_1$ で張られる線型空間 W を使うと $\text{Aff}(w_1, \dots, w_m) = e_1 + W$ と表されることに注目しておこう．特に $m \leq l$ のとき $\text{Aff}(w_1, \dots, w_m)$ は $\mathbb{R}^l$ の閉集合であり，さらに内点を持たない．

定義 2. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．このとき部分集合 $S \subset \mathbb{R}^l$ が**一般の位置にある**とは任意の

$i \in \{1, \dots, l+1\}$ について S の i 個の異なる元はアフィンの独立であるときにいう.

p:densegp

命題 3. $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を任意に与え, $O \subset \mathbb{R}^l$ を稠密開集合とする. そして $C \subset O$ を高々可算な一般の位置にある集合とする. このとき可算な稠密集合 $S \subset O$ で $C \cup S$ が一般の位置にあり $C \cap S = \emptyset$ となるものが存在する.

証明. $\mathbb{R}^l$ の可算稠密集合を適当にとり E とする. そして $E \times \mathbb{Q}_{>0}$ を適当に番号付して $E \times \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{(q_k, r_k)\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とおく. 帰納法により次のような列 $e_1, \dots, e_k$ を構成する: $C \cup \{e_1, \dots, e_k\}$ は一般の位置にあり, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ について $\|e_i - q_i\| < r_i$ を満たす. 帰納法により $e_1, \dots, e_k$ まで構成できたとして e_{k+1} を構成する. まず $C \cup \{e_1, \dots, e_k\}$ の任意の有限部分集合 I で $\text{card}(I) \leq l$ となるものについて $A(I) = \text{Aff}(I)$ と定義し, A をそのような $A(I)$ 全体の和集合とする. このとき各 $A(I)$ は閉集合で内点を持たなく, A はそのような集合の可算個の和集合なので, Baire の範疇定理により A 自体も内点を持たない. よって $O \setminus A$ は稠密である. さらに C も高々可算なので $O \setminus (A \cup C)$ も稠密である. よって $e_{k+1} \in O \setminus (A \cup C)$ でなおかつ $\|e_k - q_{k+1}\| < r_{k+1}$ を満たすものが取れる. ここで $C \cup \{e_1, \dots, e_k\}$ の任意の有限部分集合 I で $\text{card}(I) \leq l$ となるものについて $e_{k+1} \notin A(I)$ となるので $C \cup \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ は一般の位置にあることがわかる. $\square$

p:n+1inde

命題 4. $n, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^l$ は $\mathbb{R}^l$ の一般の位置にある列とする. このときもしも $2n+1 \leq l$ ならば, 集合 $\{1, \dots, m\}$ の濃度高々 $n+1$ の部分集合 I を台に持つアフィン結合 $\sum_{i=1}^m s_i \cdot e_i$ の係数は一意的である. ここで I を台に持つとは $i \in I$ のとき, そしてその時に限り $s_i = 0$ となるということである.

証明. I とは異なる濃度が高々 $n+1$ の $\{1, \dots, m\}$ の部分集合 J を台にもつアフィン結合 $\sum_{i=1}^m t_i \cdot e_i$ が $\sum_{i=1}^m s_i \cdot e_i$ と等しいとしよう. このとき

$$(1.1) \quad \sum_{i \in I \setminus J} s_i \cdot e_i + \sum_{i \in J \setminus I} (-t_i) \cdot e_i + \sum_{i \in J \cap I} (s_i - t_i) \cdot e_i = 0$$

であり, その係数を見ると

$$(1.2) \quad \sum_{i \in I \setminus J} s_i + \sum_{i \in J \setminus I} (-t_i) + \sum_{i \in J \cap I} (s_i - t_i) = 0$$

である. ここで $I \cup J$ の濃度が高々 $2n+2$ であり, l は $2n+1 \leq l$, つまり $2n+2 \leq l+1$ を満たすので $e_1, \dots, e_m$ が一般の位置にあることから $\{e_i\}_{i \in I \cup J}$ はアフィン独立である. よって $I \setminus J$ 上で $s_i = 0$ かつ $J \setminus I$ 上で $t_i = 0$ かつ $I \cap J$ 上で $s_i = t_i$ となるが, s_i と t_i

がそれぞれ I と J を台にもつので $I = J$ でなければならずこのとき $I = J = I \cap J$ なので $s_i = t_i$ が I 上で成り立ち、係数の一意性が成り立つ。 $\square$

2 関数空間と埋め込み

定義 5. X を位相空間とする。そして (H, d) を距離空間とする。この文章では $C(X, H)$ という記号で X から H への連続写像全体で、次の意味で有界なものの全体を表す：任意の $f \in C(X, H)$ についてある点 $p \in H$ と $M \in (0, \infty)$ が存在して任意の $x \in X$ について $d(p, f(x)) \leq M$ となる。そして d から誘導される $C(X, H)$ 上の $\sup$ 距離関数を $\hat{d}$ で表す。つまり $\hat{d}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ である。今回の $C(X, H)$ の定義から $\hat{d}$ はちゃんと有限の値を取ることに注意しよう。

次の命題の証明は省略する。いつものやつである。

:funccomp

命題 6. X を位相空間とし (H, d) は完備距離空間とする。このとき $(C(X, H), \hat{d})$ は完備である。

定義 7. 位相空間 X の被覆 $\mathcal{U}$ について写像 $f \in C(X, H)$ が $\mathcal{U}$ -map (あるいは $\mathcal{U}$ -small) であるとは任意の $z \in H$ についてある z の近傍 N と $U \in \mathcal{U}$ が存在し $f^{-1}(N) \subset U$ を満たすことである。この文書では $E(\mathcal{U})$ で $C(X, H)$ 内の $\mathcal{U}$ -map 全体を表すとする。

smallopen

命題 8. X を位相空間とし $\mathcal{U}$ はその被覆で (K, d) をコンパクト距離空間とする。このとき $E(\mathcal{U})$ は $C(X, K)$ の開集合である。

証明. $f \in E(\mathcal{U})$ を任意にとる。各点 $z \in K$ について N_z を z の開近傍である $U \in \mathcal{U}$ が存在し $f^{-1}(N_z) \subset U$ となるものとする。このとき $\{N_z\}_{z \in K}$ は K の被覆で K はコンパクトだから $\{N_z\}_{z \in K}$ のルベグ数 $r \in (0, \infty)$ が存在する。ここで g を $\hat{d}(f, g) < 2^{-3}r$ となる任意の $g \in C(X, K)$ とする。任意に $z \in K$ を取る。そして $M = U(z, 2^{-3}r; d)$, つまり M を z を中心とする半径 $2^{-3}r$ の d による開球とする。そして $p(z) \in Z$ を $U(z, r; d) \subset N_{p(z)}$ となるものとする。さて、任意に $x \in g^{-1}(M)$ を取る。このとき $g(x) \in M$ である。つまり $d(z, g(x)) \leq 2^{-3}r$ である。また $\hat{d}(g, f) < 2^{-3}r$ から $d(g(x), f(x)) < 2^{-3}r$ である。よって $f(x) \in U(z, r; d)$ なので $f(x) \in N_{p(z)}$ である。 $N_{p(z)}$ の定義より $f^{-1}(N_{p(z)}) \subset U$ となる $U \in \mathcal{U}$ が存在する。このとき $x \in f^{-1}(N_{p(z)})$ より $x \in U$ である。ここで $x \in g^{-1}(M)$ は任意であったから $g^{-1}(M) \subset U$ である。以上で証明が終わる。 $\square$

命題 9. X を距離空間とし, $\dim X \leq n$ で, $\mathcal{U}$ を X の有限被覆とする. そして $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は $2n+1 \leq l$ を満たすとし K は $\mathbb{R}^l$ のコンパクト部分集合で $\text{Int } K$ は凸で $\text{CL}(\text{Int } K) = K$ を満たすとする. このとき $E(\mathcal{U})$ は $C(X, K)$ のなかで稠密である.

証明. 任意の $f \in C(X, K)$ を取る. そして任意の $\eta \in (0, \infty)$ を与える. このとき K を直径が $2^{-10}\eta$ 以下の有限個の開集合 $O_1, \dots, O_q$ で覆うことができる. そして $\{U \cap f^{-1}(O_i) \mid U \in \mathcal{U}, i = 1, \dots, q\}$ を考えるとこれは X の有限被覆であり, 故に $\dim X \leq n$ なのでこの被覆の細分であるような有限被覆 $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$ が存在して $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n+1$ を満たす. 適当にゼロ集合が V_i に一致するような関数 $w_i: X \rightarrow [0, 1]$ をとり適当に話を取って割ったりして $\sum_{i=1}^r w_i = 1$ を満たすとしても良い (例えば $w_i(x) = d(x, X \setminus V_i)$ など). このとき $f(V_i)$ の直径は $2^{-10}\eta$ 以下であることに注意しよう. prop: densegp 命題5を稠密部分集合 $\mathbb{R}^l$ と $C = \emptyset$ に用いて稠密な一般の位置にある集合 $E \subset \mathbb{R}^l$ を取る. そして $i \in \{1, \dots, r\}$ について $e_i \in E \cap \text{Int } K$ を $d(f(V_i), w_i) < 2^{-5}\eta$ を満たすようにとる. これは $\text{CL}(\text{Int } K) = K$ であるから可能である. そして写像 $g: X \rightarrow K$ を $g(x) = \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot e_i$ と定義する. このとき任意の $x \in X$ について

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &= \left\| f(x) - \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot f(x) - \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot \|f(x) - e_i\| \end{aligned}$$

であり $w_i(x) > 0$ となる i については $f(x)$ と e_i の距離は $2^{-5}\eta$ なので $\widehat{d}(f, g) < \eta$ がわかる. ここで g が $E(\mathcal{U})$ に属することを示そう. $e_1, \dots, e_m$ の高々 $n+1$ 個の元のアフィン結合で表される集合を R とするとこれは $n+1$ 単体と同相な有限個の集合の和集合であるからコンパクトである. そして g の像は R に含まれている. よって R に含まれない $z \in K$ については R の補集合を N_z と取れば $g^{-1}(N_z) = \emptyset$ なので条件は満たされる. $z \in R$ としよう. ここで $z = \sum_{i \in I} c_i \cdot e_i$ で I は $\text{card}(I) \leq n+1$ となるような $\{1, \dots, m\}$ の部分集合とし $c_i \neq 0$ とする. ここでアフィン結合の定義から $I \neq \emptyset$ である. 十分小さい $\epsilon \in (0, \infty)$ を取れば任意の $y \in U(z, \epsilon; d) \cap R$ については $y = \sum_i a_i \cdot e_i$ と表したとき $i \in I$ について $a_i \neq 0$ となる. これは命題4 prop: n+1 inde から可能である. もしも g の像が $U(z, \epsilon; d)$ と共通部分を持たない場合には g による $U(z, \epsilon; d)$ の引き戻しは空集合なので $\mathcal{U}$ -map の条件は満たされている. 集合 $N = U(z, \epsilon; d)$ と g の像が共通部分を持つとしよう. このとき $g(x) \in N$ となる $x \in X$ について $i \in I$ を適当にとると ϵ の取り方から $w_i(x) > 0$ なので $x \in V_i$ である. つまり $g^{-1}(N) \subset V_i$ である. 以上で $g \in E(\mathcal{U})$ がわ

かった. よって $E(\mathcal{U})$ は $C(X, K)$ のなかで稠密である. $\square$

位相空間 X の被覆 $\mathcal{U}$ と $x \in X$ について $\text{St}(x, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$ と定義する.

位相空間 X の有限被覆の列 $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$ が被覆の基本列であるとは任意の $x \in X$ について $\{\text{St}(x, \mathcal{U}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が x の基本近傍系になるときにいう.

kihonretu

補題 10. X を可分距離化可能空間とする. このとき X には被覆の基本列が存在する.

証明. X は可分距離化可能空間であるから $[0, 1]^{\aleph_0}$ に位相的に埋め込める (ウリゾーンの距離化可能定理). よって X と同じ位相を生成する距離 d で (X, d) が全有界であるものが存在する. このとき $\mathcal{U}_n$ を X を被覆する半径 2^{-n} 以下の開球の有限集合とする. このような取り方ができるのは (X, d) が全有界だからである. すると $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は被覆の基本列になっている. $\square$

p:umekomi

命題 11. X を距離化可能空間とし, (H, d) を距離空間とする. そして $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は被覆の基本列とする. このとき $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} E(\mathcal{U}_i)$ の任意の元は位相的埋め込みになっている.

証明. $f \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} E(\mathcal{U}_i)$ を任意にとる. 今からこれが埋め込みになることを示そう. まず単射性を示そう. $x \neq y$ とする. このとき被覆の基本列の定義からある $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $y \notin \text{St}(x, \mathcal{U}_i)$ となる. そして $f \in E(\mathcal{U}_i)$ であるから $f(x)$ の近傍 N が存在して $f^{-1}(N) \subset U$ となる $U \in \mathcal{U}_i$ が存在する. 今 $y \notin \text{St}(x, \mathcal{U}_i)$ なので $y \notin U$ であり $f(y) \notin N$ が従う. 特に $f(x) \neq f(y)$ である. 次に f が位相的埋め込みであることを示そう. 点 $x \in N$ を任意に与え, その近傍 V も任意に与える. このとき被覆の基本列の定義からある $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $\text{St}(x, \mathcal{U}_i) \subset V$ である. そして $f \in E(\mathcal{U}_i)$ であるから $f(x)$ の近傍 N が存在して $f^{-1}(N) \subset U$ となる $U \in \mathcal{U}_i$ が存在する. このとき $f^{-1}(N) \subset \text{St}(x, \mathcal{U}_i) \subset V$ である. よって f^{-1} が $f(x)$ で連続であることが証明された. これで証明が終わる. $\square$

X から K への位相的埋め込み全体を $\text{Emb}(X, K)$ と書くことにする.

komidense

定理 12. X を可分距離空間とし, $\dim X \leq n$ で $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は $2n + 1 \leq l$ を満たすとし K は $\mathbb{R}^l$ のコンパクト部分集合で $\text{Int } K$ は凸で $\text{CL}(\text{Int } K) = K$ を満たすとする. このとき X から K への位相的埋め込み全体 $\text{Emb}(X, K)$ は $C(X, K)$ のなかで G_δ かつ稠密である. 特に有限次元の可分距離化可能空間はユークリッド空間に埋め込み可能である.

証明. 上記の定理群を全て合わせるとわかる. $\square$

3 普遍空間

次に高々 n 次元の可分距離化可能空間を全て埋め込めるようなコンパクト距離空間を構成しよう.

$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で X を位相空間とし, $\mathbb{R}^l$ の部分集合 K , および $\mathbb{R}^l$ の部分アフィン空間 M について $\text{Avoid}(M)$ で $C(X, K)$ の元で $\text{CL}(f(X)) \cap M = \emptyset$ となるものの全体とする.

命題 13. X を距離空間とし, $\dim X \leq n$ で, $\mathcal{U}$ を X の有限被覆とする. そして $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は $2n+1 \leq l$ を満たすとし K は $\mathbb{R}^l$ のコンパクト部分集合で $\text{Int } K$ は凸で $\text{CL}(\text{Int } K) = K$ を満たすとする. このとき $\mathbb{R}^l$ の任意の高々 n 次元のアフィン部分空間 M について $\text{Avoid}(M)$ は稠密かつ開集合である.

命題 14. まず $\text{Avoid}(M)$ が開集合であることを示そう. 任意に $h \in \text{Avoid}(M)$ を取る. このとき $\text{CL}(h(X)) \cap M$ であり, K がコンパクトであることから $\text{CL}(h(X))$ もコンパクトである. よって十分小さい η を取れば $\text{CL}(h(X))$ と M の距離は η 以上になる. そして $\hat{d}(f, h) < 2^{-1}\eta$ のとき f は $\text{CL}(f(X)) \cap M = \emptyset$ を満たす. よって $\text{Avoid}(M)$ は開集合である. 次に稠密性を示そう. 任意に $f \in C(X, K)$ を取る. ここでアフィン空間 M を張るアフィンの独立な元 $c_1, \dots, c_q$ を取る. このとき $q \leq n+1$ であることに注意せよ. そして $C = \{c_1, \dots, c_q\}$ に対して命題 [3](#) を適用して一般の位置にある稠密可算集合 $E \subset \mathbb{R}^l$ で $C \cup E$ も一般の位置にあり, $C \cap E = \emptyset$ となるものをとる. ここで命題 [9](#) の証明と同じ構成をして $g(x) = \sum_{i=1}^r w_i(x) \cdot e_i$ を構成する. 異なるのは E の取り方のみである. この g が f を近似することは命題 [9](#) の証明と同様である. 今から $g \in \text{Avoid}(M)$ を証明しよう. $e_1, \dots, e_m$ の高々 $n+1$ 個の元のアフィン結合で表される集合を R とするとこれは $n+1$ 単体と同相な有限個の集合の和集合であるからコンパクトである. そして g の像は R に含まれている. このとき命題 [4](#) と $E \cap C = \emptyset$ より $R \cap M = \emptyset$ である. よって $\text{CL}(g(X)) \cap M = \emptyset$ であり $g \in \text{Avoid}(M)$ がわかる. これで証明が終わる.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意に与える. このとき記号 N_n^{2n+1} で $[0, 1]^{2n+1}$ の部分空間でその点の座標のうち有理数であるものの個数が高々 n 個であるものの全体を表すとする. この空間は Nöbeling space と呼ばれることもあるようである. この空間が n 次元の可分距離空間の普遍空間であることを証明しよう.

定理 15. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を可分距離化可能空間で $\dim X \leq n$ とする. このとき X から N_n^{2n+1} への位相的埋め込みが存在する.

証明. $\{1, \dots, 2n+1\}$ の濃度が $n+1$ の部分集合 I と $q = (q_1, \dots, q_{n+1}) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ について

$$(3.1) \quad M(I; q) = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \forall i \in I, x_i = q_i\}$$

と定義する. このとき $M(I; q)$ は n 次元アフィン部分空間である. このとき N_n^{2n+1} の定義から $[0, 1]^{2n+1} \setminus N_n^{2n+1} = \bigcup_{I, q} M(I; q)$ である. ここで I の動く範囲は有限だし q の動く範囲は可算である. さて命題6, 定理12, そして命題11より

$$(3.2) \quad \text{Emb}(X, [0, 1]^{2n+1}) \cap \bigcap_{I, q} \text{Avoid}(M(I; q))$$

は稠密かつ G_δ である. よって X から N_n^{2n+1} への位相的埋め込みが存在する. $\square$

ユークリッド空間の次元がその線型空間としての次元と等しいということと, ちょっとした計算をすると N_n^{2n+1} の次元が n であることが示せる. すると以下のことがわかる.

系 16. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を可分距離化可能空間で $\dim X \leq n$ とする. このとき X のコンパクト化 Y であって距離化可能かつ $\dim X = \dim Y$ となるものが存在する.

参考文献

- [1] 電波通信「不動点定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2017/08/27/182714>
- [2] 電波通信, 「次元論ショートコース: 0 次元から始める位相次元」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2022/03/12/161532>
- [3] 電波通信, 「不動点定理と同値な命題」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/05/181441>
- [4] 電波通信, 「次元論からの領域不変性定理の証明」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/15/220550>
- [5] M. G. Charalambous, *Dimension theory. A selection of theorems and counterexamples* Springer/Atlantis Press (2019).
- [6] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948
- [7] A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press 1975.
- [8] K. Morita, *On the dimension of normal spaces, I.*, Japanese journal of mathematics :transactions and abstracts, vol 20 (1950), pp. 5–36, DOI: 10.4099/JJM1924.20.0_5