

# 可分距離空間上の被覆次元と帰納次元

ナンプキトラ

2026 年 6 月 27 日

## 目次

|   |                              |   |
|---|------------------------------|---|
| 1 | 位相的準備                        | 1 |
| 2 | 被覆次元                         | 2 |
| 3 | 可分距離空間                       | 6 |
| 4 | おまけ:球面への写像の拡張問題が被覆次元を特徴付けること | 8 |

この文書では正規空間の被覆次元にまつわる基本的な命題を紹介していく．特におまけの球面の拡張問題の話は興味深いと思う．この文書の内容は [8] を大いに参考にした．基本的な命題を述べた後に，可分距離化可能空間において，被覆次元で帰納的次元が上から抑えられることを証明する．

## 1 位相的準備

**補題 1** (被覆の収縮補題)．正規空間  $X$  の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  について，開被覆  $\{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $\text{CL } V_i \subset U_i$  が満たされる．

**証明**．帰納法によって証明できる．詳細は省略する．

□

集合族の相似という概念を導入する．

$I$  を添字集合とする．集合  $X$  の部分集合族  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  と  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$  が相似であるとは  $I$  の任意の部分集合  $S$  について  $\bigcap_{s \in S} A_s = \emptyset$  と  $\bigcap_{s \in S} B_s = \emptyset$  が同値になることである．同じことだが  $\bigcap_{s \in S} A_s \neq \emptyset$  と  $\bigcap_{s \in S} B_s \neq \emptyset$  が同値になるということでもある．

位相空間論では特に特に  $B_i \subset A_i$  などの包含関係が存在して  $A_i$  や  $B_i$  が開集合だったり閉集合だったりするような状況において相似な集合族を構成できるかどうかに興味がある。この文章では一般的な話は行わず有限集合族の場合に限って話を進めるということにする。

**補題 2.**  $X$  を正規空間とする。そして  $\{F_1, \dots, F_m\}$  と  $\{U_1, \dots, U_m\}$  をそれぞれ閉集合族と開集合族で  $F_i \subset U_i$  を満たしているとする ( $X$  を被覆しているなどの条件はつけない)。このとき開集合族集合族  $\{W_1, \dots, W_m\}$  が存在して  $F_i \subset W_i$  と  $\text{CL } W_i \subset U_i$  を満たしさらに  $\{F_1, \dots, F_m\}$  と  $\{\text{CL } W_1, \dots, \text{CL } W_m\}$  は相似である。

**証明.** 帰納法によって証明する。自然数  $k$  について族  $\{W_1, \dots, W_k\} \cup \{F_{k+1}, \dots, F_m\}$  が  $\{F_1, \dots, F_m\}$  と相似であり  $F_j \subset W_j$  かつ  $\text{CL } W_j \subset U_j$  を  $j = 1, \dots, k$  で満たしているとする。今から  $W_{k+1}$  を構成する。今  $\{\text{CL } W_1, \dots, \text{CL } W_k\} \cup \{F_{k+1}, \dots, F_m\}$  の有限個の共通部分で表される集合のうち  $F_{k+1}$  と交わらないものを  $\mathcal{K}$  とかく。そして  $H = X \setminus \bigcup \mathcal{K}$  と定義すると、 $\mathcal{K}$  は有限集合であるから  $H$  は  $X$  の開集合であり  $F_{k+1} \subset H$  を満たす。ここで  $X$  の正規性を用いて  $W_{k+1}$  を  $F_{k+1} \subset W_{k+1}$  かつ  $\text{CL } W_{k+1} \subset H \cap U_{k+1}$  となる開集合とする。このとき  $\mathcal{K}$  の定義から  $\{\text{CL } W_1, \dots, \text{CL } W_k\} \cup \{F_{k+1}, \dots, F_m\}$  と  $\{\text{CL } W_1, \dots, \text{CL } W_{k+1}\} \cup \{F_{k+2}, \dots, F_m\}$  は相似である。以上で証明が終わる。  $\square$

## 2 被覆次元

集合  $X$  の集合族  $\mathcal{U}$  と  $x \in X$  について  $\text{Cdeg}(\mathcal{U}; x)$  を  $x$  を含む  $\mathcal{U}$  の個数とする。そして  $\text{Cdeg}(\mathcal{U})$  を  $\sup \text{Cdeg}(\mathcal{U}; x)$  と定義する。

さて位相空間  $X$  と  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $\dim X \leq n$  であるとは  $X$  の任意の有限開被覆  $\mathcal{U}$  について、その細分となる開被覆  $\mathcal{V}$  が存在して  $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n + 1$  となることである。また  $n < \dim X$  とは  $\dim X \leq n$  の否定が成り立つときにそう書く。

**補題 3.**  $X$  を正規空間とする。このとき以下は同値である。

- (1)  $\dim X \leq n$
- (2)  $X$  の任意の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  について開被覆  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $V_i \subset U_i$  かつ  $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n + 1$  が成り立つ。
- (3)  $X$  の任意の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  について開被覆  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $V_i \subset U_i$  かつ  $\{1, \dots, m\}$  の濃度が  $n + 2$  の部分集合  $J$  について  $\bigcap_{j \in J} V_j = \emptyset$

が成り立つ.

- (4)  $X$  の濃度が  $n + 2$  の任意の開被覆  $\{U_1, \dots, U_{n+2}\}$  について開被覆  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{n+2}\}$  が存在して  $V_i \subset U_i$  かつ  $\bigcap_{j=1}^{n+2} V_j = \emptyset$  が成り立つ.

**証明.** 同値性  $[(2) \iff (3)]$  は自明である. また  $[(2) \implies (1)]$  と  $[(3) \implies (4)]$  も自明である.

$[(1) \implies (2)]$  の証明: 開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  に対してその細分となる開被覆  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_k\}$  で  $\text{Cdeg}(\mathcal{G}) \leq n + 1$  となるものが存在する. ここで  $l: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  を  $l(a)$  を  $G_a \subset U_b$  となる最小の  $b$  として定義する. そして各  $i = 1, \dots, m$  について  $V_i = \bigcup_{l(a)=i} G_a$  と定義し  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  とすれば  $\mathcal{V}$  は  $X$  の開被覆であり,  $\text{Cdeg}(\mathcal{G}) \leq n + 1$  から  $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n + 1$  を満たす.

$[(4) \implies (3)]$  の証明:  $X$  の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  を任意に与える. もしも  $m < n + 2$  のときは適当に空集合を付加してやって  $n + 2 \leq m$  と仮定しても良い. そして  $\mathcal{A}$  を集合  $\{1, \dots, m\}$  の  $n + 2$  個の部分集合の直和分割全体の集合とする. つまり  $\mathcal{A}$  の元は  $\{I_1, \dots, I_{n+2}\}$  であって各  $I_k$  は  $\{1, \dots, n+2\}$  の空でない部分集合で  $a \neq b$  の時  $I_a \cap I_b = \emptyset$  で  $\bigcup_k I_k = \{1, \dots, n+2\}$  である.  $\mathcal{A}$  は有限集合なので番号をつけて  $\{A_1, \dots, A_r\}$  とする. 以下の操作を帰納的に繰り返して  $X$  の開被覆  $\{G_{l,1}, \dots, G_{l,m}\}$  ( $l = 0, 1, \dots, r + 1$ ) を構成する. まず  $G_{0,i} = U_i$  とする. そして  $\{G_{l,1}, \dots, G_{l,m}\}$  が構成されたとき  $G_{l+1,i}$  を構成する.  $A_l = \{I_1, \dots, I_{n+2}\}$  として  $k = 1, \dots, n + 2$  について  $O_k = \bigcup_{j \in I_k} G_{l,j}$  とする. すると  $\{O_1, \dots, O_{n+2}\}$  は  $X$  の開被覆になるので (4) を用いてその細分となる開被覆  $\{P_1, \dots, P_{n+2}\}$  で  $\bigcap_{i=1}^{n+2} P_i = \emptyset$  となるものが存在する. ここで  $i = 1, \dots, m$  について  $G_{l+1,i} = P_{k(i)} \cap G_{l,i}$  と定義する. ここで  $k(i)$  は  $i \in I_{k(i)}$  となる  $k(i) \in \{1, \dots, n+2\}$  である. 今  $G_{l+1,i} \subset G_{l,i}$  に注意しよう. ここで  $V_i = G_{r+1,i}$  で  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  と定義する. 今から  $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n + 1$  を示そう.  $\{1, \dots, m\}$  の濃度が  $n + 2$  の任意の部分集合  $K$  について  $K = \{a_1, \dots, a_{n+2}\}$  として  $I_1 = a_1, \dots, I_{n+1} = \{a_{n+1}\}$  として  $I_{n+2}$  は余った  $\{1, \dots, m\}$  の元全部とする. そして  $A_l = \{I_1, \dots, I_{n+2}\}$  とする. 上で構成したのと同じ記号を用いる. 任意の  $a_i \in K$  について

$$(2.1) \quad V_{a_i} = G_{r+1,a_i} \subset G_{l+1,a_i} \subset G_{l,a_i} \cap P_i$$

であり,  $\bigcap_{i=1}^{n+2} P_i = \emptyset$  なので  $\bigcap_{a \in K} V_a = \emptyset$  である. よって (3) が成り立つ.

以上で証明が終わる. □

**補題 4.**  $X$  を正規空間とする. このとき以下は同値である.

- (1)  $\dim X \leq n$

- (2)  $X$  の任意の有限開被覆  $\{U_1, \dots, U_m\}$  について開被覆  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $\text{CL } V_i \subset U_i$  かつ  $\text{Cdeg}(\mathcal{V}) \leq n+1$  が成り立つ.
- (3)  $X$  の濃度が  $n+2$  の任意の開被覆  $\{U_1, \dots, U_{n+2}\}$  について閉被覆  $\mathcal{V} = \{F_1, \dots, F_{n+2}\}$  が存在して  $F_i \subset U_i$  かつ  $\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j = \emptyset$  が成り立つ.

**証明.** [(1)  $\iff$  (2)] は補題 1 からわかる. また [(2)  $\implies$  (3)] は自明である.

[(3)  $\implies$  (1)] は補題 2 から従う. □

被覆の境界の degree によって被覆次元を特徴付けることができる.

**命題 5.**  $X$  を正規空間とする. このとき以下は同値である (以下の条件において, 被覆とは仮定していないことに注意せよ).

- (1)  $\dim X \leq n$
- (2)  $X$  の任意の有限開集合族  $\{U_1, \dots, U_m\}$  と閉集合族  $\{F_1, \dots, F_m\}$  について開集合族  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $F_i \subset V_i$  と  $\text{CL } V_i \subset U_i$  を満たしかつ  $\text{Cdeg}(\{\partial V_1, \dots, \partial V_m\}) \leq n$  が成り立つ.
- (3)  $X$  の任意の有限開集合族  $\{U_1, \dots, U_m\}$  と閉集合族  $\{F_1, \dots, F_m\}$  について開集合族  $\mathcal{V} = \{W_1, \dots, W_m\}$  と  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  が存在して  $F_i \subset V_i \subset \text{CL } V_i \subset W_i$  と  $\text{CL } W_i \subset U_i$  を満たし  $\text{Cdeg}(\{\text{CL } W_1 \setminus V_1, \dots, \text{CL } W_m \setminus V_m\}) \leq n$  が成り立つ.
- (4)  $X$  の濃度が  $n+1$  の任意の開集合族  $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$  と閉集合族  $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$  で  $F_i \subset U_i$  となるものについて開集合族  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_{n+1}\}$  が存在して  $F_i \subset V_i$  と  $\text{CL } V_i \subset U_i$  を満たしかつ  $\bigcap_{j=1}^{n+1} \partial V_j = \emptyset$  が成り立つ.

**証明.** [(1)  $\implies$  (2)] の証明:  $\mathcal{H}$  を  $\{U_1, \dots, U_m\} \cup \{X \setminus F_1, \dots, X \setminus F_m\}$  の濃度が  $m$  の部分集合族の共通部分で表される集合全体とする. このとき仮定から  $\mathcal{H}$  は  $X$  の開被覆となる. よって (1) から degree が  $\leq n+1$  であるような開被覆  $\{W_1, \dots, W_q\}$  で  $\mathcal{H}$  の細分になるものが存在する. さらに閉被覆  $\{K_1, \dots, K_q\}$  で  $K_r \subset W_r$  となるものをとる. ここで  $r = 1, \dots, q$  に対して  $N_r$  を  $F_i \cap W_r \neq \emptyset$  となるような  $i = 1, \dots, m$  の集合全体とする. そして補題 1 から各  $i \in N_r$  について  $V_{i,r}$  を  $K_r \subset V_{i,r} \subset \text{CL } V_{i,r} \subset W_r$  となるようにとる. ここで,  $i, j \in N_r$  が  $i < j$  を満たすならば  $\text{CL } V_{i,r} \subset V_{j,r}$  となるようにとる. さて,  $i = 1, \dots, m$  について

$$(2.2) \quad V_i = \bigcup \{V_{i,r} \mid i \in N_r\}$$

と定義する. このとき  $F_i \subset V_i$  が成り立つ. というのも,  $x \in F_i$  かつ  $x \in K_r$  となる  $i, r$  が存在するので  $x \in V_{i,r} \subset V_i$  となるからである. また  $N_r$  の定義と  $\mathcal{H}$  の定義から

$i \in N_r$  なら  $W_r \subset U_i$  であり,  $V_i$  を定義する式は有限和であるから  $\text{CL } V_i \subset U_i$  となる  
ことがわかる. 最後に背理法のために濃度が  $n+1$  の  $\{1, \dots, m\}$  の部分集合  $I$  が存  
在し  $\bigcap_{i \in I} \partial V_i \neq \emptyset$  となるとしよう. 点  $x \in \bigcap_{i \in I} \partial V_i$  をとる. さて  $x \in \partial V_i$  であるか  
ら  $x \in \bigcup_{i \in N_r} \partial V_{i,r}$  である. ここで各  $i$  について  $r(i)$  を  $x \in \partial V_{i,r(i)}$  満たすものとし  
て定義しよう. このとき  $i \neq j$  ならば  $r(i) \neq r(j)$  である. というのも,  $i < j$  と仮定  
してもしも  $r(i) = r(j)$  ならば,  $\text{CL } V_{i,r(i)} \subset V_{j,r(i)}$  なので  $x \notin \partial V_i$  となり矛盾するか  
らである. さて  $x \in \partial V_{i,r(i)}$  なので特に  $x \notin V_{i,r(i)}$  である. ここで  $x \in K_{r(n+2)}$  と  
なる番号  $r(n+2)$  をとる.  $\{K_r\}$  は被覆なのでこれは可能である. さて  $x \notin V_{i,r(i)}$  なので  
 $r(n+2)$  は  $r(i)$  たちとは異なる. よって  $\partial V_i \subset W_{r(i)}$  より  $x \in \bigcap_{i=1}^{n+2} W_{r(i)}$  となるが,  
これは  $\text{Cdeg}(\{W_1, \dots, W_m\}) \leq n+1$  に矛盾する. よって  $\text{Cdeg}(\{\partial V_1, \dots, \partial V_m\}) \leq n$   
である.

[(2)  $\implies$  (3)] の証明: (2) から開集合族  $\{V_1, \dots, V_m\}$  で  $F_i \subset V_i$  と  $\text{CL } V_i \subset U_i$  を  
満たしかつ  $\text{Cdeg}\{\partial V_1, \dots, \partial V_m\} \leq n$  となるものが存在する. このとき  $\partial V_i \subset U_i$  で  
あるから補題 2 から開集合族  $\{P_1, \dots, P_m\}$  で  $\{\text{CL } P_1, \dots, \text{CL } P_m\}$  と  $\{\partial V_1, \dots, \partial V_m\}$   
が相似なもので  $\partial V_i \subset P_i \subset U_i$  となるものが存在する. ここで  $W_i = V_i \cup P_i$  と  
定義すると,  $\text{CL } V_i \subset W_i$  であり  $\partial V_i \subset \text{CL } W_i \setminus V_i$  かつ  $\text{CL } W_i \setminus V_i \subset \text{CL } P_i$  なので  
 $\{\text{CL } W_1 \setminus V_1, \dots, \text{CL } W_m \setminus V_m\}$  は  $\{\partial V_1, \dots, \partial V_m\}$  と相似である. よって  $\text{Cdeg}\{\text{CL } W_1 \setminus$   
 $V_1, \dots, \text{CL } W_m \setminus V_m\} \leq n$  である.

[(3)  $\implies$  (4)] の証明: 自明である.

[(4)  $\implies$  (1)] の証明:  $X$  の  $n+2$  枚の開集合からなる開被覆  $\{O_1, \dots, O_{n+2}\}$  を任  
意に与える. 補題 1 から閉被覆  $\{A_1, \dots, A_{n+2}\}$  が存在して  $A_i \subset O_i$  を満たす. こ  
こで  $\{O_1, \dots, O_{n+1}\}$  と  $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$  に対して (4) を用いて開集合族  $\{H_1, \dots, H_{n+1}\}$   
で  $F_i \subset H_i$  と  $\text{CL } H_i \subset U_i$  を満たし  $\bigcap_{i=1}^{n+1} \partial H_i = \emptyset$  を満たすものが存在する. そ  
してここで閉集合  $i = 1, \dots, n+2$  について閉集合  $L_i$  を  $i = 1, \dots, n+1$  のとき  
 $L_i = \text{CL } H_i \setminus \bigcup_{k < i} H_k$  で  $L_{n+2} = F_{n+2} \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} H_k$  と定義する. このとき  $\{L_1, \dots, L_{n+2}\}$   
は  $X$  の閉被覆である. というのも任意の  $x \in X$  について  $x \in H_i$  となる  $i$  が存在しな  
ければ  $x \in L_{n+2}$  であり,  $x \in H_i$  となる添字が存在するなら値が最小のそれを  $j$  として  
 $x \in L_j$  となるからである. さらに  $L_i \subset O_i$  である. さて

$$(2.3) \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} L_i = L_{n+2} \cap \bigcap_{i=1}^{n+2} \left( \text{CL } H_i \setminus \bigcup_{k < i} H_k \right) \subset L_{n+2} \cap \bigcap_{i=1} \partial H_i = \emptyset$$

となるから補題 4 から  $\dim X \leq n$  が従う. □

**定理 6.**  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とし,  $X$  を  $\dim X \leq n$  である正規空間とし,  $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  と  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  をそれぞれ閉集合族, 開集合族で  $F_i \subset U_i$  を満たすとする. このとき開集合族  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  であって  $F_i \subset V_i$  と  $\text{CL } V_i \subset U_i$  を満たしかつ  $\text{Cdeg}(\{\partial V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}) \leq n$  を満たすものが存在する.

**証明.** まず  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  の部分集合であって濃度が  $n+1$  のもの全体を考える. そのような集合は高々可算個しかないので, 番号をつけて列挙して  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i, \dots$  とする. そして今から帰納法により,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  によって添字付られた以下のような開集合の列の列  $\{P_i(k)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, \{Q_i(k)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  で任意の  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $F_i \subset P_i(k)$  と  $\text{CL } Q_i(k) \subset U_i$  を満たしかつ任意の  $l \in \{1, \dots, k\}$  について  $\text{Cdeg}(\{\text{CL}(Q_a(k)) \setminus P_a(k) \mid a \in \Gamma_l\}) \leq n$  が成り立つものを構成する. 今  $k$  までは上記の列が構成できたとする. 今から  $\{P_i(k+1)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, \{Q_i(k+1)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  を構成する. まず  $a \in \Gamma_{k+1}$  については  $\{\text{CL } P_a(k)\}_{a \in \Gamma_{k+1}}$  と  $\{Q_a(k)\}_{a \in \Gamma_{k+1}}$  について命題 5 を用いて  $\text{CL } P_a(k) \subset P_a(k+1) \subset Q_a(k+1)$  かつ  $\text{CL } Q_a(k+1) \subset Q_a(k)$  で  $\text{Cdeg}(\{\text{CL } Q_a(k+1) \setminus P_a(k+1)\}_{a \in \Gamma_{k+1}}) \leq n$  となる  $\{Q_a(k+1)\}_{a \in \Gamma_{k+1}}$  と  $\{P_a(k+1)\}_{a \in \Gamma_{k+1}}$  をとる.  $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \Gamma_{k+1}$  については  $P_b(k+1) = P_b(k)$  かつ  $Q_b(k+1) = Q_b(k)$  と定義する. ここで任意の  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $\text{CL } Q_i(k+1) \setminus P_i(k+1) \subset \text{CL } Q_i(k) \setminus P_i(k)$  なので, 任意の  $l$  について  $\text{Cdeg}(\{\text{CL}(Q_a(k)) \setminus P_a(k) \mid a \in \Gamma_l\}) \leq n$  が成り立つ. さて, この  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  によって添字付られた列  $\{P_i(k)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}, \{Q_i(k)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  を用いて, 任意の  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  について  $V_i = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} P_i(k)$  と定義する. もちろん  $F_i \subset V_i \subset \text{CL } V_i \subset U_i$  は満たされる. また任意の  $k$  について  $P_i(k) \subset V_i$  かつ  $\text{CL } V_i \subset Q_i(k)$  なので  $\partial V_i \subset \text{CL}(Q_i(k)) \setminus P_i(k)$  である. よって  $\Gamma_k$  について  $\text{Cdeg}(\{\partial V_a \mid a \in \Gamma_k\}) \leq n$  となる. これで証明が終わる.  $\square$

### 3 可分距離空間

**定理 7.**  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とする. そして  $X$  を  $\dim X \leq n$  を満たす可分距離化可能空間とする. さらに  $X$  の閉集合  $F$  と開集合  $U$  は  $F \subset U$  を満たしているとする. このとき開集合  $V$  が存在して  $F \subset V$  と  $\text{CL } V \subset U$  を満たしさらに  $\dim \partial V \leq n-1$  を満たす.

**証明.**  $X$  に全有界な距離関数  $d$  で  $X$  と同じ位相を生成するのを与える. これは  $X$  が完備距離化可能であることから  $[0, 1]^{\aleph_0}$  に位相的に埋め込み可能であることからとってこれる. 適当に正の有理数全体を番号付して  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  とし空間  $X$  の可算稠密部分集合を  $\{q_s\}_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  とする. そして  $(k, s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$  について  $F_{k,s}$  を半径が  $r_k$  で中心が  $q_s$  の

に関する開球とし、 $U_{k,s}$  を半径が  $2r_k$  で中心が  $q_s$   $d$  に関する開球とする．もちろん  $F_{k,s} \subset U_{k,s}$  である．今二つの可算族  $\{F\} \cup \{F_{k,s}\}_{k,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  と  $\{U\} \cup \{U_{k,s}\}_{k,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  に対して定理 6 を用いて  $F \subset V$  かつ  $\text{CL} V \subset U$  となる開集合  $U$  と  $F_{k,s} \subset V_{k,s}$  かつ  $\text{CL} V_{k,s} \subset U_{k,s}$  となる開集合  $V_{k,s}$  であって  $\text{Cdeg}(\{\partial V\} \cup \{V_{k,s}\}_{k,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}) \leq n$  となるものとする．このとき  $\dim \partial V \leq n - 1$  であることを示そう．閉集合族  $\{C_1, \dots, C_n\}$  と開集合族  $\{O_1, \dots, O_n\}$  は  $C_i \subset O_i$  と  $C_i \cap \partial V \neq \emptyset$  を満たすとする．さて  $X$  は  $d$  に関して全有界であるから開被覆  $\{X \setminus A_1, \dots, X \setminus A_n\} \cup \{O_1, \dots, O_n\}$  にはルベグ数  $\eta$  が存在する． $2r_k < \eta$  となる  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  をとる．再び全有界性から有限集合  $H \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在して  $\{F_{k,q_h}\}_{h \in H}$  が  $X$  を被覆する．ここで、 $H$  を  $m$  個数の部分集合  $H_1, \dots, H_n$  にと直和分割してさらに  $i = 1, \dots, n$  について各  $H_i$  は  $U_{k,q_h} \subset O_i$  となるようにする．ここで適当に  $H$  に有限個の元を追加することにより任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  について  $H_i \neq \emptyset$  としても良い．これは  $2r_k < \eta$  なので可能である．そして  $S_i = \bigcup_{h \in H_i} V_{k,q_h}$  と定義すると  $i \in \{1, \dots, n\}$  について  $A_i \subset S_i \subset O_i$  である．これは  $2r_k < \eta$  からの帰結である．ここで  $\partial_{\partial V} S_i \subset \partial S_i \subset \bigcup_{h \in H_i} \partial V_{k,q_h}$  であることから  $\text{Cdeg}(\{\partial V\} \cup \{V_{k,s}\}_{k,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}) \leq n$  を用いて

(3.1)

$$\partial V \cap \bigcap_{i=1}^n \partial S_i \subset \partial V \cap \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{h \in H_i} \partial V_{k,q_h} = \bigcup_{a_1 \in H_1, \dots, a_{n+1} \in H_{n+1}} \partial V \cap \bigcap_{i=1}^n \partial V_{k,q_{a_i}} = \emptyset$$

となる．よって  $\dim \partial V \leq n - 1$  である．以上で証明が終わる．  $\square$

**補題 8.**  $X$  を正規空間で  $\dim X \leq 0$  を満たしているとする．このとき  $X$  は *clopen* な開基を持つ．つまり  $\text{ind} X \leq 0$  である．

**証明.** 点  $x \in X$  をとる．そして  $O$  を  $x$  の開近傍とする．ここで開被覆  $\{O, X \setminus \{x\}\}$  を考える． $\dim X \leq 0$  より  $P \subset O$  かつ  $Q \subset X \setminus \{x\}$  で  $P \cup Q = X$  となる開集合  $P, Q$  であって  $\text{Cdeg}(\{P, Q\}) \leq 1$  を満たすものが存在する．この条件から  $P \cap Q = \emptyset$  である．そして  $P \cup Q = X$  より  $P$  と  $Q$  は *clopen* である．このとき  $x \in P \subset O$  であるから  $X$  に *clopen* な開基が存在することがわかった．  $\square$

**定理 9.**  $X$  を可分距離空間とする．このとき  $\text{ind} X \leq \dim X$  である．

**証明.** 定理 7 と補題 8 と帰納法を用いるとわかる．  $\square$

## 4 おまけ:球面への写像の拡張問題が被覆次元を特徴付けること

**定理 10** (Borsuk のホモトピー拡張定理).  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  で  $X$  を可算パラコンパクトな正規空間とし  $A$  をその閉集合とする. 連続写像  $H: A \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^n$  について  $H(x, 0) = f(x)$  で  $H(x, 1) = g(x)$  とおく. このときもしも  $F: X \rightarrow \mathbf{S}^n$  で  $F|_A = f$  となるものが存在するならば  $G: X \rightarrow \mathbf{S}^n$  で  $G|_A = g$  となるものが存在する. さらに  $G$  は  $F$  とホモトピックに選べる. つまり, 空間全体に拡張されるという性質は (球面に値をとるホモトピーに関して) ホモトピー不変ということである.

**証明.**  $X$  が可算パラコンパクトなので  $X \times [0, 1]$  は正規である. 定理の仮定にある  $F$  を用いて写像  $H: A \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^n$  を拡張子で  $H: X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^n$  とみなす. もちろん  $X \times \{0\}$  上で  $H$  は  $F$  に一致するということである. さらにこの  $H$  を  $\mathbb{R}^{n+1}$  への写像とみなして Tietze-Urysohn の拡張定理を適用すると  $H$  の拡張  $P: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  を得る. そして  $W = P^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  とし,  $Q: W \rightarrow \mathbf{S}^n$  を

$$(4.1) \quad Q(x, t) = \frac{P(x, t)}{\|P(x, t)\|}$$

と定義すると  $Q$  は  $W$  上連続である. もちろん  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \subset W$  であり  $Q|_{X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]} = P$  である (以上の議論は  $\mathbf{S}^n$  が ANR(正規空間) ということはこの言葉を用いずに証明したものである). そして  $X$  の開集合  $U$  を  $p \in X$  であってある近傍  $p$  の  $N$  が存在し  $N \times [0, 1] \subset W$  となるもの全体とする. すると Tube Lemma と  $A \times [0, 1] \subset W$  から  $A \subset U$  そして  $X$  の正規性からある連続写像  $u: X \rightarrow [0, 1]$  で  $u(A) = 1$  かつ  $u(X \setminus U) = \{0\}$  となるものが取れる. そこで  $L: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^n$  を

$$(4.2) \quad L(x, t) = Q(x, t \cdot u(x))$$

と定義する. もちろんこれは連続であり  $G(x) = L(x, 1)$  は  $g$  の拡張になっていて,  $G$  は  $F$  とホモトピックである. □

**定理 11.**  $X$  を正規空間とする. このとき  $\dim X \leq n$  であることと以下の条件は同値である.  $X$  の任意の閉集合  $A$  と連続写像  $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$  に対して連続写像  $F: X \rightarrow \mathbf{S}^n$  が存在し  $F|_A = f$  を満たす.

**証明.** 位相的には同じなので  $\mathbf{S}^n$  と  $\partial \mathbf{I}^{n+1}$  を同一視する. まず最初に  $\dim X \leq n$  を仮定

する．このとき写像  $f$  は写像  $f: A \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$  である．そして  $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$  と成分表示し

$$K_i = \{x \in A \mid f_i(x) = -1\}$$

$$L_i = \{x \in A \mid f_i(x) = 1\}$$

とすると  $K_i$  と  $L_i$  は  $X$  の閉集合でなおかつ  $K_i \cap L_i = \emptyset$  を満たしさらに

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (K_i \cup L_i)$$

となる．ここで定理 5 を  $\{K_i\}_{i=1}^{n+1}$  と  $\{X \setminus L_i\}_{i=1}^{n+1}$  に適応し各  $i$  について開集合  $P_i$  と  $Q_i$  で  $A_i \subset P_i$  と  $P_i \subset Q_i$   $\text{CL } Q_i \subset X \setminus L_i$  でなおかつ  $\bigcap_{i=1}^{n+1} (\text{CL } Q_i \setminus P_i) = \emptyset$  を満たすものが存在する．ここで Tietze-Urysohn の拡張定理から各  $i$  について連続写像  $u_i: X \rightarrow [-1, 1]$  であって  $u_i(\text{CL } P_i) = -1$  かつ  $u_i(X \setminus Q_i) = 1$  となるものが存在する．このとき  $u_i^{-1}(0) \subset Q_i \setminus \text{CL } P_i \subset \text{CL } Q_i \setminus P_i$  なので  $\bigcap_{i=1}^{n+1} u_i^{-1}(\{0\}) = \emptyset$  となる．もちろん各  $i$  について  $K_i \subset u_i^{-1}(\{-1\})$ ,  $L_i \subset u_i^{-1}(\{1\})$  を満たすことに注意せよ．ここで

$$u: X \rightarrow [-1, 1]^{n+1}$$

を  $u = (u_1, \dots, u_n)$  と定義する．ここで  $A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (K_i \cup L_i)$  と  $u_i$  の性質から  $x \in A$  のとき  $u(x)$  は  $\partial \mathbf{I}^{n+1}$  への写像になる．ここで  $v = u|_A: A \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$  とおく．そして  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  を

$$h(x, t) = (1 - t)v(x) + tf(x)$$

と定義する． $A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (K_i \cup L_i)$  であることと  $K_i, L_i$   $u_i$  の定義から  $h(x, t)$  は常にその成分のいずれかは絶対値が 1 である．つまり  $\|h(x, t)\|_\infty \neq 0$  である．ここで  $\|\cdot\|_\infty$  は  $\ell^\infty$ -ノルムである．つまり  $H: X \times [0, 1] \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$  を

$$H(x, t) = \frac{h(x, t)}{\|h(x, t)\|_\infty}$$

と定義できる．ここで  $H(x, 0) = v(x)$  で  $H(x, 1) = f(x)$  に注意せよ．この  $H$  は  $v$  と  $f$  を結ぶホモトピーであり， $v$  は  $X$  全体への連続拡張  $u$  を持つから Borsuk のホモトピー拡張定理 (定理 10) から  $f$  は拡張  $F: X \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$  を持つ．

逆に拡張問題が常に解けるとして， $X$  の次元の評価をしよう． $X$  の濃度が  $n + 1$  の任意の開集合族  $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$  と閉集合族  $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$  で  $F_i \subset U_i$  となるものを考える．今  $H_i = X \setminus U_i$  として  $A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (F_i \cup H_i)$  とする．そして各  $u_i: A \rightarrow [-1, 1]$  を  $u_i(F_i) = -1$  かつ  $u_i(H_i) = 1$  を満たすものとする．このとき  $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$  は

$\partial \mathbf{I}^{n+1}$  への写像になっている. さて, 定理の仮定から連続写像  $g = (g_1, \dots, g_{n+1}): X \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$  で  $g|_A = u$  となるものが存在する. そして  $V_i = g_i^{-1}([-1, 0))$  とすると  $\text{CL } V_i \subset g_i^{-1}([-1, 0])$  で  $F_i \subset V_i \subset \text{CL } V_i \subset U_i$  を満たす. さらに  $\partial V_i \subset g_i^{-1}(\{0\})$  なので  $g$  が  $\partial \mathbf{I}^{n+1}$  への写像であることから  $\bigcap_{i=1}^{n+1} \partial V_i = \emptyset$  である. よって命題 5 から  $\dim X \leq n$  である.  $\square$

## 参考文献

- [1] 電波通信「不動点定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2017/08/27/182714>
- [2] 電波通信, 「次元論ショートコース: 0 次元から始める位相次元」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2022/03/12/161532>
- [3] 電波通信, 「不動点定理と同値な命題」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/05/181441>
- [4] 電波通信, 「次元論からの領域不変性定理の証明」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/15/220550>
- [5] M. G. Charalambous, *Dimension theory. A selection of theorems and counterexamples* Springer/Atlantis Press (2019).
- [6] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948
- [7] A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press 1975.
- [8] K. Morita, *On the dimension of normal spaces, I.*, Japanese journal of mathematics :transactions and abstracts, vol 20 (1950), pp. 5–36, DOI: 10.4099/JJM1924.20.0\_5