

廉価版領域不変性定理の証明

ナンブキトラ

2026 年 4 月 21 日

この文章では領域不変性定理を次元論などの難しいことをなるべく使わないで証明してみる．次元論を捨てたことにより球面への連続写像の拡張で次元を特徴づける定理の範囲がユークリッド空間に狭まった．しかし，ユークリッド空間では次元論の代わりにユークリッド空間特有の現象，つまり「解析学」を使うことができる（実際にはリプシッツ性があれば今回使う程度のサードの定理は証明できるので，本当に解析っぽい部分はサードの定理で測度ゼロの概念を用いるところのみである）．

以下の証明方法，特にサードの定理を使う部分についてはテレンス・タオ [10] がブログ，もしくはその元ネタである [9] に影響を受けた．

証明の方針は [4] と全く同じである．違うのは定理 6 の適応範囲をユークリッド空間の球面のみに絞ってユークリッド空間特有の性質で証明した部分のみである．第二節の領域不変性定理の証明は [4] をそのまま流用している．

1 本文

記号 $U(a, r)$ で a を中心とする半径 r の開球を表すとする．

定理 1. $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とし $f: K \rightarrow \mathbb{R}^k$ を連続写像とする．このとき任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ に対して C^∞ 級関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ が存在して $\sup_{x \in K} \|f(x) - h(x)\| < \epsilon$ が成り立つ．

証明. K のコンパクト性から f は K 上一様連続である．そして f の一様連続性からある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して $x, y \in K$ が $\|x - y\| < \delta$ を満たすならば $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ となる．そして K のコンパクト性からある点列 $a_1, \dots, a_m \in K$ が存在して $U(a_1, \delta), \dots, U(a_m, \delta), X \setminus K$ が $\mathbb{R}^k$ の開被覆となる．よって滑らかな単位分割 $\{u_i\}_{i \in \{1, \dots, m+1\}}$ が存在して u_i は $U(a_i, \delta)$ に従属し u_{m+1} は $X \setminus K$ に従属する．よって

$x \in K$ のとき $\sum_{i=1}^m u_i(x) = 1$ となる. そして $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ を

$$h(x) = \sum_{i=1}^m f(a_i) \cdot u_i(x)$$

と定義する. すると h は滑らかであり任意の $x \in K$ について

$$\begin{aligned} \|f(x) - h(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^m f(x)u_i(x) - \sum_{i=1}^m f(a_i)u_i(x) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m (f(x) - f(a_i))u_i(x) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m u_i(x) \|f(x) - f(a_i)\| < \sum_{i=1}^m u_i(x)\eta = \eta \end{aligned}$$

□

なので, 定理が成り立つことがわかる.

注意. 他にも方法はある. まず関数 f に対してティーチェの拡張定理を用いて f を $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ に拡張する. そしてこの g を例えば多項式近似定理やストーン・ワイエルストラスの定理を使って K 上で近似すると証明できる. あるいは軟化子でぼぐしてあげると定理が証明できる. 実は微分可能性はサードの定理を適応する時にしか使わず, さらに今回使うサードの定理のためにはリプシッツ性があれば十分なので, 上の定理で滑らかな単位の分割の代わりにリプシッツな単位の分割をこさえてやればこの文書の話は回すことができる.

定理 2 (Sard の定理スペシフィック). 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は C^∞ 級とする. このとき $f(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の中で測度ゼロである.

証明. 大まかにいえば f が局所リプシッツであることから f の像が測度ゼロになることが従う. つまり f が局所的に M リプシッツだとすると f による半径 r のボールの像は半径 Mr のボールに含まれる. なのでこのような写像で測度ゼロ性は保たれるのである. □

補題 3. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $r \in (0, 1)$ とする. そして $A_r = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 1 - r < \|x\| < 1 + r\}$ とおく. なめらかなレトラクション $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ を

$$\pi(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

と定義する. このとき r に依存する定数 M_r が存在して π は A_r 上で M_r リプシッツ写像である.

証明. A_r は相対コンパクトで π の微分のノルムが上から抑えられるからである. $\square$

系 4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とし A を X の閉部分集合とする. このとき任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ と任意の連続写像 $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ に対して (なめらかな) 関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ が存在し以下の条件を満たす.

- (1) $\sup_{x \in A} \|f(x) - h(x)\| < \epsilon$.
- (2) 像 $h(\mathbb{R}^n)$ は $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ を含まない.

証明. $r = \min\{2^{-1}, \epsilon\}$ かつ $\eta = \frac{\min\{\epsilon, r\}}{1000(M_r+1)}$ と定義する. 写像 $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ を $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ とみなす. そして定理 1 を適応してなめらかな関数 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ で $\sup_{x \in A} \|f(x) - u(x)\| < \eta$ となるものを得る. このとき定理 2 から $u(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ のなかで測度ゼロなので特に $\mathbb{R}^{n+1} \setminus u(\mathbb{R}^n)$ は稠密である. よって十分小さい $\alpha \in (0, \epsilon/10)$ を使って $v(x) = u(x) + \alpha$ と定義される関数 $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は $0 \notin v(\mathbb{R}^n)$ を満たす. このとき $\sup_{x \in A} \|f(x) - v(x)\| \leq 2\eta$ である. そして $h = \pi \circ v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ と定義する. すると $x \in A$ のとき $\sup_{x \in A} \|f(x) - u(x)\| < \eta < r$ から $u(x), f(x) \in A_r$ なので $f = \pi \circ f$ と組み合わせて補題 3 から $x \in A$ のとき

$$\|f(x) - h(x)\| = \|\pi \circ f(x) - \pi \circ v(x)\| \leq M_r \|f(x) - v(x)\| \leq 2M_r \eta$$

である. よって $\sup_{x \in A} \|f(x) - h(x)\| \leq 2M_r \eta < \epsilon$ となり, 証明が終わる. $\square$

定理 5 (球面の拡張手性と次元の関係性スペシフィック). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とし A を X の閉部分集合とする. このとき任意の連続写像 $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ は拡張となる連続写像 $g: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を持つ.

証明. これはちゃんと証明する. まず系 4 を使って (なめらかな) 関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ であつて

- (1) $\sup_{x \in A} \|f(x) - h(x)\| < 1$.
- (2) 像 $h(\mathbb{R}^n)$ は $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ を含まない.

を満たすものをとる. 次にティーチェの拡張定理を使って f の拡張となる連続関数 $w: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を得る. そして

$$V = \{x \in X \mid \|h(x) - w(x)\| < 1\}$$

と定義すると V は X の開集合である. ここで A 上で $\|h(x) - f(x)\| < 1$ となるという仮定から $A \subset V$ である. さてウリゾーンの補題から連続写像 $\phi: X \rightarrow [0, 1]$ で A 上で 1 を

常にとり $X \setminus V$ 上で恒等的に 0 となるものが存在する. ここで $J: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$J(x, t) = (1 - t)h(x) + tw(x)$$

と定義するとこれは連続写像になる. 今から $J(x, \phi(x))$ が任意の $x \in X$ についてノンゼロであることを証明しよう.

まず $x \in V$ については h の値域は $\mathbf{S}^n$ なので任意の $t \in [0, 1]$ について以下の計算を得る.

$$\begin{aligned} \|J(x, t)\| &\geq \|h(x)\| - \|h(x) - h(x, t)\| \\ &= \|h(x)\| - \|th(x) - tw(x)\| \\ &= \|h(x)\| - t\|h(x) - w(x)\| \\ &\geq \|h(x)\| - 1 \cdot \|h(x) - w(x)\| \\ &> \|h(x)\| - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり $J(x, t) \neq 0$ である. 特に $J(x, \phi(x)) \neq 0$ である.

次に $x \notin V$ の時は $\phi(x)$ が 0 の値を取り続けることから恒等的に $J(x, \phi(x)) = h(x)$ である. 特に $J(x, \phi(x)) \neq 0$ である. 以上から任意の $x \in X$ で $J(x, \phi(x)) \neq 0$ となることがわかった. そこで $g: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を

$$g(x) = \frac{J(x, \phi(x))}{\|J(x, \phi(x))\|}$$

と定義すれば $x \in A$ 上では確かに f と一致する. これで証明が終わる. $\square$

定理 6. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし A を $\mathbf{S}^n$ の閉部分集合とする. このとき任意の連続写像 $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ は拡張となる連続写像 $g: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ が存在する.

証明. $\mathbf{S}^n$ を上半球 $\mathbf{H}_+^n$ と下半球 $\mathbf{H}_-^n$ に分ける. この二つの共通部分である赤道を $\mathbf{E}$ とおく. そして $S = \mathbf{H}_-^n \cap A$ で $T = \mathbf{H}_+^n \cap A$ とする. このとき, まず $\mathbf{H}_-^n$ について $\mathbf{H}_-^n$ は $\mathbf{D}^n$ に同相なので定理 5 を適応して $f|_S: S \rightarrow \mathbf{S}^n$ を $g_0: \mathbf{H}_-^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ に拡張する. このとき g_0 は S 上で f と同じ値を取るのだから $\mathbf{H}_-^n$ と A の共通部分 S で貼り合わさって f は $\mathbf{H}_-^n \cup A$ 上まで拡張されたことになる. この拡張された関数を $g_1: \mathbf{H}_-^n \cup A \rightarrow \mathbf{S}^n$ とする. 次に $\mathbf{H}_+^n$ について g_1 の定義域 $\mathbf{H}_-^n \cup A$ と $\mathbf{H}_+^n$ の共通部分は $\mathbf{E} \cup T$ である. ここで $\mathbf{H}_+^n$ と $\mathbf{E} \cup T$, そして $g_1|_{\mathbf{E} \cup T}: \mathbf{E} \cup T \rightarrow \mathbf{S}^n$ に定理 5 を適応すると連続写像 $g_2: \mathbf{H}_+^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ をえる. もちろん g_1 と g_2 の定義域 $\mathbf{H}_+^n$ と $\mathbf{H}_-^n$ の共通部分 $\mathbf{E}$ 上では g_1 と g_2 は同じ値を取るのだから連続写像が貼り合わさって連続写像 $g: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ をえる. 作り方から $g|_A = f$ なので定理が示された. $\square$

2 領域不変性定理

以下の定理によりユークリッド空間内のコンパクト部分集合 K の境界点は K の位相的言明のみで特徴付けることがわかる。これが領域不変性定理の肝である。

この説の内容は [4] と同じである。テレンス・タオ [10] のブログではこうした境界点の位相的特徴付けも簡略化することにより簡単な領域不変性定理の証明をえているが、この定理自体をなくしてしまうことは勿体無いと思ったので、この文書では簡略化などはしていない。

定理 7. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とする。このとき $p \in \partial_{\mathbb{R}^n} K$ となるための必要十分条件は p の K 内の任意の近傍 N について p の K 内の開近傍 U であって $U \subset N$ を満たしかつ任意の連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ は連続な拡張 $g: K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を持つようなものが存在することである。

証明. まず最初に $p \in \partial K$ を仮定して定理の条件を導く。 N を p の任意の近傍とする。そして B を p を中心とする十分小さい半径を持つ開球で $K \cap B \subset N$ を満たすものとする。このとき $U = K \cap B$ が条件を満たすことを見よう。ここで $L = \partial B$ とすると L は $\mathbf{S}^{n-1}$ と同相である。今ここで任意の連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を考える。ここで $K \setminus U$ は K の閉集合である。特に $\mathbb{R}^n$ の閉集合でもある。ここで $\dim_T L \leq n-1$ なので $\dim_T(K \cap L) \leq n-1$ である。ここで $L \cap K \subset K \setminus U$ に注意して定理 6 から連続写像 $f|_{L \cap K}: L \cap K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ の拡張である連続写像 $u: L \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る。さて L と $K \setminus U$ の共通部分は $L \cap K$ で、この上では u と f は同じ値を取るので写像が貼り合わさって連続写像 $h: (K \setminus U) \cup L \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る。そして p が K の境界なので B の点であって K に属さないもの q を取ることができる。任意の点 $x \in K$ について q から $x \in K$ へ伸ばした直線と L との交点を $b(x)$ とする。このとき $b: X \rightarrow L$ は連続写像である。そして $g: X \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を

$$g(x) = \begin{cases} h(b(x)) & x \in U \cup (L \cap K) \\ f(x) & x \in K \setminus U \end{cases}$$

と定義するとこれら二つの関数 $h(b(x))$ と $f(x)$ は $L \cap K$ 上で値が一致するのでちゃんと張り合って連続関数になる。この g はちゃんと f の拡張になっている。

逆に $p \in K$ が定理の条件を満たすとしよう。背理法のために $p \in K$ は K の内点であるとする。ここで p を中心とする十分小さい半径を持つ開球 B で $\text{CL } B \subset K$ と

なるものを考える．すると定理の仮定より p の開近傍 U で $U \subset B$ で任意の連続関数 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ が K 上に拡張するものが存在する．ここで写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を以下のように定義する．点 p から $x \in K \setminus U$ へと直線を伸ばし ∂B との交点を $f(x)$ とする．これは連続写像で ∂B は $\mathbf{S}^{n-1}$ と同相なのでちゃんと連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る．このとき f は ∂B 上で恒等写像になることに注意しよう．すると定理の条件より連続写像 $g: K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ が存在する．さて $\text{CL } B \subset K$ であった．このとき $g|_{\text{CL } B}: \text{CL } B \rightarrow \partial B$ を考えると $g|_{\text{CL } B}$ は $\text{CL } B$ から ∂B へのレトラクトになる．これは No retract theorem に矛盾するので $p \in K$ は境界点でなければならない． $\square$

いよいよ領域不変性定理を証明する．

定理 8 (領域不変性定理). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続単射とする．このとき $f(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

証明. 任意の $p \in U$ について $f(p)$ が $f(U)$ の内点であることを証明すれば良い． p の十分小さい近傍 N で $\text{CL } N$ がコンパクトで $\text{CL } N \subset U$ であるものをとる．このとき $f|_{\text{CL } N}$ を考えると f はコンパクト集合からハウスドルフ空間への連続単射なので位相的埋め込みになる．定理 7 より点 p が境界点かどうかは $\text{CL } N$ の内在的な位相的条件で特徴づけられる．つまり p は $\text{CL } N$ の内点であるから $f(p)$ は $f(\text{CL } N)$ の内点になる．よって特に $f(p)$ は $f(U)$ の内点である． $\square$

系 9. M と N を同じ次元の境界つき多様体とし $f: M \rightarrow N$ を同相写像とする．このとき f は ∂M を ∂N に移す．

証明. もしも f が $p \in \partial M$ を $N \setminus \partial N$ に移すと、 f^{-1} を考えることによって局所的にはユークリッド空間の内点が p に写っていることになるが、 p は上半平面の境界点なので領域不変性定理に矛盾する． $\square$

参考文献

- [1] 電波通信「不動点定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2017/08/27/182714>
- [2] 電波通信, 「次元論ショートコース: 0 次元から始める位相次元」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2022/03/12/161532>
- [3] 電波通信, 「不動点定理と同値な命題」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/05/181441>

- [4] 電波通信, 「次元論からの領域不変性定理の証明」,
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/15/220550>
- [5] M. G. Charalambous, *Dimension theory. A selection of theorems and counterexamples* Springer/Atlantis Press (2019).
- [6] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948
- [7] T. Kihara, *The Brouwer invariance theorems in reverse mathematics*, Forum of Mathematics, Sigma, vol.8, 2020, doi: 10.1017/fms.2020.52.
- [8] C. Kuratowski, *Une Méthode de Prolongement des Ensembles Relativement Fermés ou Ouverts*, Colloq. Math. 1 (1948), 273-278, doi:10.4064/cm-1-4-273-278.
- [9] W. Kulpa, *The Poiancré–Miranda Theorem*, Amer. Math. Monthly 104, No. 6, 545–550 (1997) doi: 10.2307/2975081
- [10] T. Tao, *Brouwer’s fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert’s fifth problem*, <https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/>
- [11] A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press 1975.