

善良超フィルターの存在証明

ナンブ キトラ

2026 年 4 月 17 日

この文章では Kunen [4] の方法によって善良超フィルター (good ultrafilter) の存在を証明する。よくわかんないところは学士論文 [3] を参考にした。

善良超フィルターの存在証明といえば数学書「超積と超準解析」[1] に記述がある。しかしこの本が 2026 年現在入手困難で、善良超フィルターの存在が記述された日本語の文書も見かけないことからこの文書を書くことにした。とりあえず善良超フィルターの存在がわかれば飽和モデルの構成の難しい部分が解消できて、超準解析の部分は色々な本に記述があるので絶版本を無理して購入する必要がなくなるのではないかと思われなくもない。ところでこの本は国会図書館デジタルコレクションで閲覧可能であるらしい。

1 準備: ケーニヒの補題

基数に関する König の補題が必要になったので、急いで証明する。

定理 1. 基数 μ によって添字づけられた基数の二つの族 $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ と $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ は任意の $\alpha < \mu$ について

$$\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$$

を満たすとする。このとき以下の不等式が成り立つ。

$$\sum_{\alpha<\mu} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha<\mu} \lambda_\alpha.$$

証明. 二つの集合族 $\{K_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ と $\{L_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ は $\alpha < \mu$ について $\text{card}(K_\alpha) = \kappa_\alpha$, $\text{card}(L_\alpha) = \lambda_\alpha$, を満たし, そして $\alpha \neq \beta$ の時 $K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$ と $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ を満たすとする。このような族は常にとることが出来る。このとき $\text{card}\left(\prod_{\alpha<\mu} K_\alpha\right) = \sum_{\alpha<\mu} \kappa_\alpha$ であり $\text{card}\left(\prod_{\alpha<\mu} L_\alpha\right) = \prod_{\alpha<\mu} \lambda_\alpha$ である。まず最初に $\prod_{\alpha<\mu} K_\alpha$ から $\prod_{\alpha<\mu} L_\alpha$ への単射を構成しよう。適当に各 $\alpha < \mu$ に対して単射 $f_\alpha: K_\alpha \rightarrow L_\alpha$ をとってくる。

$\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$ なので, f_α は絶対に全射ではない. よって f_α の像に含まれない元を一つとり p_α とする. このとき写像 $h: \prod_{\alpha < \mu} K_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha < \mu} L_\alpha$ を $x \in K_\alpha$ のとき $h(x)$ の第 α 成分が $f_\alpha(x)$ でそれ以外の β 成分は p_β となるように定義する. この h が単射となることを見よう. f_α の単射性から各 K_α 上では単射である. $\alpha \neq \beta$ で $x \in K_\alpha$ かつ $y \in K_\beta$ のときには $h(x)$ の第 α 成分は $f_\alpha(x)$ であり, $h(y)$ のそれは p_α である. p_α は f_α の像には含まれないから $f_\alpha(x) \neq p_\alpha$ であるから $h(x) \neq h(y)$ である. 以上で h が単射であることがわかった. つまり $\sum_{\alpha < \mu} \kappa_\alpha \leq \prod_{\alpha < \mu} \lambda_\alpha$ がわかった. 次にこれが真の不等式になることを示す. そのために任意の写像 $f: \prod_{\alpha < \mu} K_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha < \mu} L_\alpha$ が全射ではないことを示せば良い. 写像 f を成分表示して $f = (f_\alpha)_{\alpha < \mu}$ とする. このとき $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$ なので写像 $f_\alpha|_{K_\alpha}: K_\alpha \rightarrow L_\alpha$ は全射ではないのでこの像に含まれない元 p_α を取ることが出来る. そして点 $p \in \prod_{\alpha < \mu} L_\alpha$ を第 α 成分が p_α となる点とする. 今から p が f の像に含まれないことを証明しよう. そのためには任意の $\alpha < \mu$ について p が $f(K_\alpha)$ に属していないことを示せば良い. なんとなれば $f(K_\alpha)$ の L_α への射影は $f_\alpha|_{K_\alpha}$ の像であるから p_α はこれに含まれない. よって p は $f(K_\alpha)$ に含まれない. これで f が絶対に全射ではないことがわかった. つまり目的の不等式が成り立つ. $\square$

系 2. 基数 κ について $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ が成り立つ.

証明. 列 $\{\theta_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$ を $\sup_{\alpha < cf(\kappa)} \theta_\alpha = \kappa$ かつ $\theta_\alpha < \kappa$ を満たすものとしてとってくる. 定数列 $\{\kappa\}_{\alpha < cf(\kappa)}$ と上記の列に対して定理 1 を適応すると $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ を得る. $\square$

系 3. 基数 κ について $\kappa < cf(2^\kappa)$ が成り立つ.

証明. もしも $cf(2^\kappa) \leq \kappa$ だとすると

$$(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \times \kappa} = 2^\kappa$$

となり系 2 に矛盾する. $\square$

2 本文

フィルターの定義は省略する. 特に断りのない限り, フィルターといえば真のフィルターとする.

X を集合とするとき $[X]^{<\omega_0}$ で X の有限部分集合全体の集合を表すとする. そして $\mathcal{P}(X)$ で X の冪集合を表すとする.

定義 4 (単調写像, 準同型). X を集合とする. 写像 $p: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が単調であるとは $a, b \in [X]^{<\omega_0}$ についてもしも $a \subset b$ ならば $p(b) \subset p(a)$ となるときにいう. そして $h: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が準同型であるとは任意の $a, b \in [X]^{<\omega_0}$ について $h(a \cup b) = h(a) \cap h(b)$ を満たすときにいう. 準同型ならば単調であることに注意しよう. そして二つの写像 $f, g: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ について $f \leq g$ とは任意の $a \in [X]^{<\omega_0}$ について $f(a) \subset g(a)$ と定義する.

定義 5 (善良超フィルター (good ultrafilter)). X を集合とし $\mathcal{F}$ をその上のフィルターとする. このとき $\mathcal{F}$ が**善良超フィルター (good ultrafilter)** であるとは任意の単調写像 $p: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}$ について準同型写像 $h: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}$ が存在して $h \leq p$ となることである.

集合 X, Y について $\text{Map}(X, Y)$ で X から Y への写像全体の集合を表すとする.

定義 6 (large oscillation family). X を集合とし $\mathcal{F}$ をその上の ($\mathcal{P}(X)$ も含めた) フィルターとする. このとき $\text{Map}(X, X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が **large oscillation family mod $\mathcal{F}$** であるとは有限個の任意の $\mathcal{S}$ の元 $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と同じ個数の任意の有限個の X の元 $v_1, \dots, v_m \in X$ について

$$X \setminus \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\} \notin \mathcal{F}$$

が成り立つことである.

注意. Kunen の論文 [4] では上記概念は *independent set mod $\mathcal{F}$* と名付けられている. 論文 [2] によれば [4] のプレプリントの段階では *large oscillation family* という名前が用いられていたらしく, [2] では *large oscillation family* という名前が使われている. *independent set* はすでに他の名前に使われているというか [4] では三つくらい異なる *independent set* の概念が出てくる (互いに関係があるが) のでややこしいから *large oscillation family* という名前の方がいいと思う.

補題 7. X を集合とし $\mathcal{F}$ をその上のフィルターとする. このとき $\text{Map}(X, X)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{F}$* であることと有限個の任意の $\mathcal{S}$ の元 $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と同じ個数の任意の有限個の X の元 $v_1, \dots, v_m \in X$, そして任意の $A \in \mathcal{F}$ について

$$A \cap \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\} \neq \emptyset$$

が成り立つことは同値である.

証明. まず $\mathcal{S}$ が large oscillation family mod $\mathcal{F}$ と仮定し, 有限個の任意の $\mathcal{S}$ の元 $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と同じ個数の任意の有限個の X の元 $v_1, \dots, v_m \in X$, そして任意の $A \in \mathcal{F}$ をとってくる. ここで $Z = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\}$ とおく. すると

$$X \setminus Z \notin \mathcal{F}$$

である. もしも $Z \cap A = \emptyset$ だとすると $A \subset X \setminus Z$ なので $\mathcal{F}$ がフィルターであることから $X \setminus Z \in \mathcal{F}$ が成り立ち矛盾する. よって $Z \cap A \neq \emptyset$ であり, 補題の条件が成り立つ.

逆に補題の条件が成り立つとしよう. そして有限個の任意の $\mathcal{S}$ の元 $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と同じ個数の任意の有限個の X の元 $v_1, \dots, v_m \in X$ をとってくる. ここで $Z = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\}$ とおく. ここでももしも $X \setminus Z \in \mathcal{F}$ だとすると補題の条件から $Z \cap (X \setminus Z) \neq \emptyset$ でなければならないがこれはありえない. よって $X \setminus Z \notin \mathcal{F}$ である. つまり $\mathcal{S}$ は large oscillation family mod $\mathcal{F}$ である. $\square$

さて以下の命題を考えるにあたって $\{X\}$ は X 上のフィルターであることに注意しよう.

命題 8. κ を基数とし X を濃度 κ の集合とする. このとき large oscillation family mod $\{X\}$ となるような $\mathcal{S}$ であって $\text{card}(\mathcal{S}) = 2^\kappa$ となるものが存在する.

証明. 集合 $K = \{(s, r) \mid s \in [X]^{<\omega_0}, r \in \text{Map}(\mathcal{P}(s), X)\}$ の濃度は κ である. そこでこれを X で添字づけて $\{(s_x, r_x)\}_{x \in X}$ とする. そして各 $A \in \mathcal{P}(X)$ について $f_A: X \rightarrow X$ を $f_A(x) = r_x(A \cap s_x)$ と定義する. このとき $\mathcal{S} = \{f_A\}_{A \in \mathcal{P}(X)}$ が条件を満たすことを見よう. 相異なる $A_1, \dots, A_m$ と X の元 $v_1, \dots, v_m$ を任意にとってくる. このとき $A_1, \dots, A_m$ は相異なるから有限集合 $t \in [X]^{<\omega_0}$ が存在して $A_1 \cap t, \dots, A_m \cap t$ が相異なる. そして関数 $l: \mathcal{P}(t) \rightarrow X$ を $l(A_i \cap t) = v_i$ と定義する. これは $A_1 \cap t, \dots, A_m \cap t$ が相異なることから可能である. ここで $Z = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_{A_i}(x) = v_i\}$ とする. そして $(s_a, r_a) = (t, l)$ となる $a \in X$ をとってくると $a \in Z$ なので Z は空ではない. よって $X \setminus Z \neq X$ であるから $X \setminus Z \notin \{X\}$ なので族 $\mathcal{S}$ は large oscillation family mod $\{X\}$ である. また $\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}(X)$ で添字づけられており, この添字づけが単射であることが上の議論からわかるから $\text{card}(\mathcal{S}) = 2^\kappa$ である. $\square$

命題 9. X を集合とし $\mathcal{F}$ をその上のフィルター, そして $\mathcal{S}$ を large oscillation family mod $\mathcal{F}$ とし $A \in \mathcal{P}(X)$ とする. このとき X 上のフィルター $\mathcal{G}$ と $\mathcal{T} \subset \text{Map}(X, X)$ が存在して以下を満たす.

- (1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

- (2) $\mathcal{T}$ は *large oscillation family mod $\mathcal{G}$* であり, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ と $\text{card}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}) < \aleph_0$ を満たす.
(3) A と $X \setminus A$ のどちらかは $\mathcal{G}$ に属する.

証明. 場合わけで証明する. $\mathcal{F} \cup \{A\}$ から生成される ($\mathcal{P}(X)$ も含めた) フィルターを $\mathcal{H}$ とする.

最初に $\mathcal{S}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{H}$* である場合を考えよう. このとき $\mathcal{H}$ は真のフィルターであり $A \in \mathcal{H}$ である. ここで $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ とおけば命題の条件をすべて満たす.

次に $\mathcal{S}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{H}$* でない場合を考えよう. すると補題 7 からある $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と $v_1, \dots, v_m$ が存在し, さらに $F \in \mathcal{F}$ が存在して

$$A \cap F \cap \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\} = \emptyset$$

である. ここで $Z = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i\}$ とおこう. すると $A \cap F \cap Z = \emptyset$ である. ここで $\mathcal{F} \cup \{Z\}$ から生成されるフィルターを $\mathcal{G}$ とする. このとき補題 7 から $\mathcal{G}$ は真のフィルターになっている. そして $A \cap F \cap Z = \emptyset$ から $F \cap Z \subset X \setminus A$ なので $X \setminus A \in \mathcal{G}$ である. そして $\mathcal{T} = \mathcal{S} \setminus \{f_1, \dots, f_m\}$ とする. この $\mathcal{T}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{G}$* であることを見よう. $\mathcal{T}$ から $g_1, \dots, g_k$ と X から $u_1, \dots, u_k$ をとってくる. そして $W = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, k\} g_i(x) = u_i\}$ とする. このとき

$$W \cap Z = \{x \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(x) = v_i \text{ かつ } \forall j \in \{1, \dots, k\} g_j(x) = u_j\}$$

なので, $\mathcal{S}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{F}$* であることから補題 7 から任意の $F \in \mathcal{F}$ から $W \cap Z \cap F \neq \emptyset$ である. これは W が $\mathcal{G}$ の任意の元と交わりを持つということを示している. よって再び補題 7 から $\mathcal{T}$ が *large oscillation family mod $\mathcal{G}$* であることが従う. $\square$

命題 10. X を集合とし $\mathcal{F}$ をその上のフィルター, そして $\mathcal{S}$ を *large oscillation family mod $\mathcal{F}$* とし $p: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}$ を単調写像とする. このとき X 上のフィルター $\mathcal{G}$ と $\mathcal{T} \subset \text{Map}(X, X)$ が存在して以下を満たす.

- (1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$
(2) $\mathcal{T}$ は *large oscillation family mod $\mathcal{G}$* であり, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ と $\text{card}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}) < \aleph_0$ を満たす.
(3) 準同型 $h: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{G}$ が存在して $h \leq p$ を満たす.

証明. 適当に $g \in \mathcal{S}$ をとってくる. そして $\mathcal{T} = \mathcal{S} \setminus \{g\}$ とおく. そして各 $t \in [X]^{<\omega_0}$ に

対して $q_t: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を

$$q_t(s) = \begin{cases} \emptyset & s \not\subset t \\ p(t) & s \subset t \end{cases}$$

と定義する. そして $\{t_x\}_{x \in X}$ を $[X]^{<\omega_0}$ の添字づけとする. そして $q: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を

$$q(s) = \bigcup_{x \in X} (q_{t_x}(s) \cap g^{-1}(\{x\}))$$

と定義する. さらに $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F} \cup \bigcup_{s \in [X]^{<\omega_0}} q(s)$ から生成される ($\mathcal{P}(X)$ を含めた) フィルターとする. まず q が準同型であることを見よう. 任意に $a, b \in [X]^{<\omega_0}$ をとる. ここで一般に $w \in [X]^{<\omega_0}$ について

$$q(w) = \bigcup_{x \in X} (q_{t_x}(w) \cap g^{-1}(x)) = \bigcup_{x \in X, w \subset t_x} (p(t_x) \cap g^{-1}(x))$$

となることに注意しよう. この観察のもと以下の式変形をする.

$$\begin{aligned} q(a) \cap q(b) &= \left(\bigcup_{x \in X, a \subset t_x} (p(t_x) \cap g^{-1}(x)) \right) \cap \left(\bigcup_{y \in X, b \subset t_y} (p(t_y) \cap g^{-1}(y)) \right) \\ &= \bigcup_{x \in X, y \in X, a \subset t_x, b \subset t_y} p(t_x) \cap g^{-1}(x) \cap p(t_y) \cap g^{-1}(y) \\ &= \bigcup_{x \in X, y \in X, a \subset t_x, b \subset t_y} p(t_x) \cap p(t_y) \cap g^{-1}(x) \cap g^{-1}(y). \end{aligned}$$

ここで, $x \neq y$ なら $g^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) = \emptyset$ となるから

$$\begin{aligned} &\bigcup_{x \in X, y \in X, a \subset t_x, b \subset t_y} p(t_x) \cap p(t_y) \cap g^{-1}(x) \cap g^{-1}(y) \\ &= \bigcup_{x \in X, a \subset t_x, b \subset t_x} p(t_x) \cap g^{-1}(x) = \bigcup_{x \in X, a \cup b \subset t_x} p(t_x) \cap g^{-1}(x) \\ &= q(a \cup b) \end{aligned}$$

となるから $q(a \cup b) = q(a) \cap q(b)$ となる. よって q が準同型であることがわかる.

次に $\mathcal{G}$ が真のフィルターであることを見てみよう. 写像 q が準同型であることから任意の $s \in [X]^{<\omega_0}$ と任意の $F \in \mathcal{F}$ について $F \cap q(s) \neq \emptyset$ であることを証明すれば良い. ここで $t_x = s$ となる $x \in X$ をとる. すると $g \in \mathcal{S}$ で $\mathcal{S}$ が large oscillation family mod $\mathcal{F}$ であることと p の像が $\mathcal{F}$ であることから $F \cap p(t_x) \cap g^{-1}(x) \neq \emptyset$ となる. $s = t_x$ な

ので $p(t_x) \cap g^{-1}(x) \subset q(s)$ であり, $F \cap q(s) \neq \emptyset$ を得る. これで $\mathcal{G}$ が真のフィルターであることがわかった.

ここで $q \leq p$ を証明しよう. 任意の $w \in [X]^{<\omega_0}$ をとる. このとき

$$q(w) = \bigcup_{x \in X, w \subset t_x} (p(t_x) \cap g^{-1}(x))$$

である. 写像 p は単調であったので, $w \subset t_x$ となる x について $p(t_x) \subset p(w)$ である. 故に

$$q(x) = \bigcup_{x \in X, w \subset t_x} (p(t_x) \cap g^{-1}(x)) \subset \bigcup_{x \in X, w \subset t_x} p(t_x) \subset p(w)$$

となるので $q \leq p$ が従う.

最後に $\mathcal{T}$ が large oscillation family mod $\mathcal{G}$ であることを証明しよう. 任意の $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}$ と $v_1, \dots, v_m \in X$ をとる. そして

$$Z = \{z \in X \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} f_i(z) = v_i\}$$

とおく. このとき任意の $w \in [X]^{<\omega_0}$ と任意の $F \in \mathcal{F}$ をとる. そして $t_x = w$ となる $x \in X$ をとる. このとき $\mathcal{S}$ が large oscillation family mod $\mathcal{F}$ であることと $p(w) \in \mathcal{F}$ であることから $(F \cap p(w)) \cap (Z \cap g^{-1}(x)) \neq \emptyset$ である. ここで $p(w) \cap g^{-1}(x) = p(t_x) \cap g^{-1}(x) \subset q(w)$ なので $(F \cap q(w)) \cap Z \neq \emptyset$ がわかる. フィルター $\mathcal{G}$ は $F \cap q(w)$ という形の集合から生成されるから $\mathcal{T}$ が large oscillation family mod $\mathcal{G}$ であることがわかる. これで証明が終わる. $\square$

定義 11. 集合 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が可算非完備であるとはある可算列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $A_n \in \mathcal{F}$ と $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_n = \emptyset$ を満たすときにいう.

定理 12 (Kunen). κ を無限基数とし X を濃度が κ であるような集合とする. このとき X 上に可算非完備な善良超フィルターが存在する.

証明. 冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の濃度は 2^κ であるからこの集合を 2^κ で全単射に添字づけて $\{A_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ とする. そして $\text{card}([X]^{<\omega_0}) = \kappa$ と $\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^\kappa$ から $\text{Map}([X]^{<\omega_0}, \mathcal{P}(X))$ の濃度は $(2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \times \kappa} = 2^\kappa$ である. よって $\text{Map}([X]^{<\omega_0}, \mathcal{P}(X))$ の部分集合である単調な写像全体を全射に添字づけてそれを $\{p_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ とする. ただしここで, 各単調写像 $p: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ について $p = p_\alpha$ となる α は 2^κ 個あるように添字づけする. これは $2^\kappa \times 2^\kappa = 2^\kappa$ であるから可能である.

今から超限再帰によって以下のような列 $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ と $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ を構成する.

- (K1) 各 $\alpha < 2^\kappa$ について $\mathcal{F}_\alpha$ は X 上の真のフィルターであり $\mathcal{S}_\alpha$ は large oscillation family mod $\mathcal{F}_\alpha$ である.
- (K2) 任意の $\alpha < 2^\kappa$ について $\text{card}(\mathcal{S}_\alpha) = 2^\kappa$ である.
- (K3) もしも $\gamma < 2^\kappa$ が極限順序数であるときには $\mathcal{F}_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} \mathcal{F}_\alpha$ と $\mathcal{S}_\gamma = \bigcap_{\alpha < \gamma} \mathcal{S}_\alpha$ が成り立つ.
- (K4) 任意の $\alpha < 2^\kappa$ について $\mathcal{S}_\alpha \setminus \mathcal{S}_{\alpha+1}$ は有限集合である.
- (K5) $\mathcal{F}_0$ は可算非完備である.
- (K6) 任意の $\alpha < 2^\kappa$ について A_α か $X \setminus A_\alpha$ のいずれか一方は $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ に属する.
- (K7) 任意の $\alpha < 2^\kappa$ について $p_\alpha: [\rightarrow]^{<\omega_0} \mathcal{P}(X)$ が $p_\alpha([X]^{<\omega_0}) \subset \mathcal{F}_\alpha$ を満たすとき準同型 $q: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha+1}$ が存在して $q \leq p_\alpha$ を満たす.

まず $\mathcal{S}_0$ と $\mathcal{F}_0$ の構成をしよう. 命題 8 で保証される large oscillation family mod $\{X\}$ を $\mathcal{S}_{-1}$ とする. そして $f \in \mathcal{S}_{-1}$ をとる. そして $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{-1} \setminus \{f\}$ とする. ここで X の空でない部分集合の可算族 $\{J_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ であって, $J_n \neq X$, $J_{n+1} \subset J_n$ かつ $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} J_n = \emptyset$ となるものを取り $\{f^{-1}(J_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ から生成されるフィルターを $\mathcal{F}_0$ とする. このとき $\mathcal{F}_0$ はもちろん可算非完備である. 族 $\mathcal{S}_{-1}$ が large oscillation family mod $\{X\}$ であることから $\mathcal{S}_0$ が large oscillation family mod $\mathcal{F}_0$ であることがわかる. すると命題 9 と命題 10 から上記の性質を満たす $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ と $\{\mathcal{S}_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ が構成できる. このとき

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < 2^\kappa} \mathcal{F}_\alpha$$

と定義する. 各 $\mathcal{F}_\alpha$ が真のフィルターなのでそのいずれも $\emptyset$ を含んでいない. よって $\mathcal{F}$ も $\emptyset$ を含んでおらずこれが真のフィルターであることがわかる. 条件 (K6) から任意の $A \in \mathcal{P}(X)$ について A と $X \setminus A$ のいずれか一方は $\mathcal{F}$ に属するので $\mathcal{F}$ は超フィルターである. また $\mathcal{F}_0$ が可算非完備であるから $\mathcal{F}$ もそうである. このフィルター $\mathcal{F}$ が善良であることを示すために任意の $p: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}$ を考える. 系 3 から $\kappa < cf(2^\kappa)$ であり $[X]^{<\omega_0}$ の濃度は κ なので $\mathcal{F}$ の定義から p の像は十分大きい番号 $\beta < 2^\kappa$ を持つ $\mathcal{F}_\beta$ に含まれる. 添字づけ $\{p_\alpha\}_{\alpha < 2^\kappa}$ はダブリが 2^κ 回起こるようなとったので十分大きい $\beta < \gamma$ となる $\gamma < 2^\kappa$ について $p = p_\gamma$ となる. すると p_γ は単調写像 $p_\gamma: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}_\gamma$ となるので, 条件 (K7) から準同型 $q: [X]^{<\omega_0} \rightarrow \mathcal{F}_{\gamma+1}$ が存在し $q \leq p$ を満たす. よって $\mathcal{F}$ が善良であることがわかる. これで証明が終わる. $\square$

注意. 上記の証明において $\mathcal{F}_0$ の定義をうまく変えることによって X 上の善良超フィルター全体の濃度が 2^{2^κ} となることがわかる. 今からそれを見よう. 記号は流用する. 部分族 $\Theta \subset \mathcal{S}_{-1}$ で $\text{card}(\Theta) = 2^\kappa$ かつ $\text{card}(\mathcal{S}_{-1} \setminus \Theta) = 2^\kappa$ となるものと $\theta \in \mathcal{S}_{-1} \setminus \Theta$

を任意にとって固定する．ところでこのような Θ は 2^{2^κ} 個あることに注意しよう ($2^\kappa + 2^\kappa + 2^\kappa = 2^\kappa$ から当濃度で 3 分割して一つの成分の部分集合と他の成分の和集合を考えれば良い)．そして $G(\Theta) = \{\theta^{-1}(J_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cup \{X \setminus f^{-1}(J_0)\}_{f \in \Theta}$ から生成されるフィルターを $\mathcal{F}_0$ とし, $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{-1} \setminus \Theta$ とする．作り方から $\mathcal{F}_0$ が可算非完備なのはわかる．また $J_0 \neq \emptyset$ と $J_0 \neq X$ そして $\mathcal{S}_{-1}$ が *large oscillation family mod $\{X\}$* であることから $G(\Theta)$ が有限交差性を持つことがわかる．よって $\mathcal{F}_0$ は真のフィルターであることがわかる．ここでもしも $\Theta_0 \neq \Theta_1$ と仮定する．ここで対称性から $h \in \Theta_0 \setminus \Theta_1$ が取れるとしても一般性を失わない．このとき $h^{-1}(J_0)$ は $G(\Theta_0)$ の元と空な交わりをもつ．そして $h^{-1}(J_0)$ は $G(\Theta)$ と空でない交わりを常に持つ．よって Θ ごとの $\mathcal{F}_0$ およびそれを含む超フィルターは Θ ごとに絶対に相異なる．そして Θ の選び方は 2^{2^κ} 個あるので善良超フィルター全体が 2^{2^κ} の濃度を持つことがわかる．

参考文献

- [1] 齋藤正彦, 超積と超準解析, 東京図書, 1972.
- [2] W. W. Comfort and S. Negrepointis, *On families of large oscillation*, Fund. Math., 75 (1972), 275–290, doi: 10.4064/fm-75-3-275-290
- [3] G. Montagna, *Good ultrafilter and saturated models*, Bachelor Thesis, 2019, Delft University of Technology, Netherland.
<https://repository.tudelft.nl/record/uuid:f5cc2f93-556f-46b6-9833-a2d08b33538e>
- [4] K. Kunen, *Ultrafilters and independent sets*, Trans. Am. Math. Soc. 172, 299–306 (1973) doi: 10.2307/1996350.