

次元論からの領域不変性定理の証明

ナンブキトラ

2026 年 6 月 27 日

この文書は [2] の続きであるが、電波通信の記事 [2] は独自の定義で次元論をやっているので、この文書では繰り返しをためらうことなく最初から説明をする。見返してみたら結構ガバガバでびっくりした。

目次

1	前回までのあらすじ 1・次元の定義	1
2	前回までのあらすじ改・大きいのと小さい帰納的次元	6
3	今回のお話	10
4	領域不変性定理	15
5	ユークリッド空間の次元	17

1 前回までのあらすじ 1・次元の定義

定義 1. $\dim_T X = -1$ であるとは $X = \emptyset$ と定義する。

定義 2. 位相空間 X の部分集合 S が ***clopen*** であるとは、 S が開かつ閉集合であるときにいう。

定義 3. X を可分距離化可能空間とする。このとき X が 0 次元であるとは X が空集合ではなく X の ***clopen*** 集合からなる開基が存在する時にいう。このとき $\dim_T X = 0$ と表す。

定義 4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, X を可分距離化可能空間とする. このとき整数 $\dim_T X$ を以下を満たす最小の整数 m で定義する. X の $m+1$ 個の部分空間 $X_0, \dots, X_m$ が存在して $\dim_T X_i \leq 0$ と $X = \bigcup_{i=0}^m X_i$ を満たす. この定義のもと, $\dim_T X \leq n$ とは X の $n+1$ 個の部分空間 $X_0, \dots, X_n$ で $\dim_T X_i \leq 0$ と $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$ を満たすものが存在することを意味する. また, $\dim_T$ は位相不変量であることがわかる.

$\dim_T$ の定義から直ちに次の二つのことがわかる.

補題 5. X を可分距離化可能空間とし, $S \subset X$ とする. この時 $\dim_T S \leq \dim_T X$ が成り立つ.

補題 6. X を可分距離化可能空間とし, $A, B \subset X$ とする. この時 $\dim_T A \leq n$ かつ $\dim_T B \leq 0$ ならば $\dim_T A \cup B \leq n+1$ が成り立つ.

補題 7. X を可分距離化可能空間とする. $\mathcal{B}$ を X の開基とする. このとき $\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ で開基になりさらに $\text{card}(\mathcal{A}) \leq \aleph_0$ を満たすものが存在する.

証明. X は可分距離化可能空間なのでその部分集合も可分距離化可能である. よって X の任意の部分集合はリンデレフである. X の可算な開基 $\mathcal{C}$ を取る. 任意の $U \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{B}$ が開基であることと, U がリンデレフであることから可算集合 $\mathcal{A}_U \subset \mathcal{B}$ で $\bigcup_{V \in \mathcal{A}_U} V = U$ となるものが存在する. そして

$$\mathcal{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} \mathcal{A}_U$$

とおけば $\mathcal{A}$ が求めるものになっている. □

系 8. X を可分距離化可能空間とする. このとき $\dim_T \leq 0$ であることと, 可算開基であって *clopen* な集合からなるものが存在することは同値である.

補題 9. X を可分距離化可能空間とするこのとき $\dim_T X \leq 0$ であることと任意の X 内の交わらない二つの閉集合 G, H に対して *clopen* 集合 O が存在して $G \subset O$ と $H \cap O = \emptyset$ を満たすことは同値である.

証明. 後半の条件から $\dim_T X \leq 0$ が導かれるのは明らかなので逆を示す.

今 $\dim_T X \leq 0$ なので各点に可算な近傍形で *clopen* なものからなるものが存在する. そのようなものを $p \in G$ について $\mathcal{N}_p$ と表すことにする. さらに H が閉集合であることから任意の $V \in \mathcal{N}_p$ について $V \cap H = \emptyset$ と仮定してもよい (必要なら $\{S \cap (X \setminus H)\}_{S \in \mathcal{N}_p}$

と置き換えれば良い). そして $X \setminus G$ も次元が 0 以下なので clopen な集合からなる開基 $\mathcal{B}$ が存在する. このとき集合族

$$\bigcup_{p \in G} \mathcal{N}_p \cup \mathcal{B}$$

は X の開基になるので補題 7 からこの集合族の部分族で可算な開基 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する. ここで $U_i \cap G \neq \emptyset$ ならば $U_i \cap H = \emptyset$ に注意しよう. そして $V_0 = U_0$ で $V_i = U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$ と定義する. すると各 V_i は開集合で $X = \bigcup_i V_i$ となる. そして

$$O = \bigcup_{V_i \cap G \neq \emptyset} V_i$$

とすると

$$X \setminus O = \bigcup_{V_i \cap G = \emptyset} V_i$$

なので O は clopen であり, $G \subset O$ を満たす. さらに V_i について $V_i \cap G \neq \emptyset$ ならば $V_i \cap H = \emptyset$ なので $H \subset X \setminus O$ となるから O は求める集合になっている. $\square$

命題 10. X を空でない可分距離化可能空間とする. もしも可算個の開集合 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ で $\dim_T A_i \leq 0$ と $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ を満たすならば $\dim_T X = 0$ である.

証明. X が補題 9 の条件を満たすことを証明しよう. X の交わらない二つの閉集合 G, H を与える. 帰納的に P_i と Q_i, R_i, L_i を構成する. まず $G \cap A_0$ と $H \cap A_0$ は A_0 のなかの交わらない閉集合である. A_0 は 0 次元空間なので補題 9 より A_0 の中のある clopen 集合 P_0 と Q_0 が存在して

- (1) $G \cap A_0 \subset P_0$
- (2) $H \cap A_0 \subset Q_0$
- (3) $P_0 \cap Q_0 = \emptyset$
- (4) $P_0 \cup Q_0 = A_0$

を満たす.

さて A_0 は閉集合だから P_0 と Q_0 は X の閉集合でもあるし, $G \cup P_0$ と $H \cup Q_0$ は X の交わらない閉集合である. ここで X の正規性^{*1}を用いて以下を満たす X 二つの開集合 R_0 と L_0 を得る.

- (1) $G \cup P_0 \subset R_0$

^{*1} 距離化可能空間は常に正規である.

- (2) $H \cup Q_0 \subset L_0$
- (3) $\text{CL}(R_0) \cap \text{CL}(L_0) = \emptyset$

一般に P_i, Q_i, R_i, L_i を帰納的に以下を満たすように定義する.

- (1) P_i と Q_i は A_i の clopen 集合
- (2) $\text{CL}(R_{i-1}) \cap A_i \subset P_i$
- (3) $\text{CL}(L_{i-1}) \cap A_i \subset Q_i$
- (4) $P_i \cap Q_i = \emptyset$
- (5) $P_i \cup Q_i = A_i$
- (6) R_i, L_i は X の開集合
- (7) $\text{CL}(R_{i-1}) \cup P_i \subset R_i$
- (8) $\text{CL}(L_{i-1}) \cup Q_i \subset L_i$
- (9) $\text{CL}(R_i) \cap \text{CL}(L_i) = \emptyset$

このように構成できることは各 A_i が clopen であることと X の正規性からわかる. このとき以下が満たされる

- (1) $A_i \subset R_i \cup L_i$
- (2) $\text{CL}(R_{i-1}) \subset R_i$
- (3) $\text{CL}(L_{i-1}) \subset L_i$

そして $R = \bigcup_i R_i, L = \bigcup_i L_i$ とすると R と L は開集合である. そして $X = \bigcup_i A_i \subset R \cup L$ なので $X = R \cup L$ である. また矛盾を導き出すために $x \in R \cap L$ となる x がもしも存在したとすると $x \in R_i$ と $x \in L_j$ となる i, j が存在するが $k = \max\{i, j\}$ とすると $x \in R_k \cap L_k = \emptyset$ となり矛盾する. つまり $R \cap L = \emptyset$ である. R と L は交わらない開集合で定義から $G \subset R$ と $H \subset L$ を満たす. そして $R \cup L = X$ なので R と L は閉集合でもある. このことは補題 9 から $\dim_T X = 0$ を意味する. $\square$

定義 11. X を位相空間とする. X の部分集合 S が F_σ であるとは S が X 内の可算個の開集合の和集合として表される時にいう.

系 12. 可分距離空間が 0 次元であるような可算個の F_σ 集合の和集合で表されるのならば全体空間も 0 次元である.

定理 13. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. X を可分距離空間とする. このとき X の可算個の F_σ 集合 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在し $\dim_T A_i \leq n$ と $X = \bigcup_i A_i$ を満たすならば $\dim_T X \leq n$ である.

証明. n に関する帰納法で証明する. $n = 0$ の時は既に命題 10 で証明されている. $n + 1$ より小さい数では定理が成り立つとする. このとき可算個の閉集合 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在し $\dim_T A_i \leq n + 1$ と $X = \bigcup_i A_i$ を満たすと仮定してもよい. このとき $B_0 = A_0$, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j$ と定義する. すると各 B_i は F_σ 集合であり $\dim_T B_i \leq n + 1$ を満たしさらに B_i たちは交わらず $X = \bigcup_i B_i$ が成り立つ. さて $\dim_T \leq n + 1$ の定義から各 i について B_i の部分集合 M_i と N_i で $\dim_T M_i \leq n$ と $\dim_T N_i = 0$ となる. $M = \bigcup_i M_i$ と $N = \bigcup_i N_i$ と定義する. 各 M_i は互いに交わらないので $M_i = M \cap B_i$ となる. よって M_i は M のなかで F_σ 集合である. よって帰納法の仮定より $\dim_T M \leq n$ となる. 同様に $\dim_T N = 0$ である. X は M と N の和集合なので, 補題 6 から $\dim_T X \leq n + 1$ が成り立つ. $\square$

さて今から $\dim_T \mathbb{R}^n \leq n$ と $\dim_T \mathbb{S}^n \leq n$ を証明する. ここで, $\mathbb{S}^n$ とは n 次元球面である.

補題 14. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき $\mathbb{Q}^n$ は 0 次元である.

証明. 一点集合は閉集合でなおかつ 0 次元なので命題 10 からわかる. $\square$

補題 15. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ は 0 次元である.

証明. 点 $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ をとる. 任意に $\epsilon > 0$ をとり, 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ について $\eta_i, \kappa_i > 0$ を

- (1) 各 i について $\eta_i < \epsilon$ かつ $\kappa_i < \epsilon$
- (2) $(x_1 - \eta_1, \dots, x_n - \eta_n) \in \mathbb{Q}^n$
- (3) $(x_1 + \kappa_1, \dots, x_n + \kappa_n) \in \mathbb{Q}^n$

を満たすようにとる. (2), (3) の条件を満たす η_i, κ_i が存在するのは $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ の中で稠密だからである. $U = \prod_{i=1}^n (x_i - \eta_i, x_i + \kappa_i)$ かつ $C = \prod_{i=1}^n [x_i - \eta_i, x_i + \kappa_i]$ とおく. これらの集合について $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n = C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ なので $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ は $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ の clopen 集合であり, x の近傍でもある. ϵ は任意なので各点 x について $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ 内の clopen な近傍系が存在することがわかった. よって $\dim_T (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n = 0$ である. $\square$

補題 16. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき $\dim_T \mathbb{R}^n \leq n$ と $\dim_T \mathbb{S}^n \leq n$ が成り立つ.

証明. $k \in \{0, \dots, n\}$ について $E_k \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合で高々 k 個の座標が有理数になっている点全体とする. 今から $\dim_T E_k = 0$ を証明する. 今 $E_n = \mathbb{Q}^n$ か

つ $E_0 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ なので補題 14, 15 から $\dim_T E_n = \dim_T E_0 = 0$ がわかる．よって $k \in \{1, \dots, n-1\}$ について $\dim_T E_k = 0$ を証明する． $Z(k)$ を $\{1, \dots, k\}$ の濃度がちょうど k 個の部分集合全体とする．そして $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in Z(n, k)$ と $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{Q}^k$ について $A(\sigma, v)$ を任意の $j \in \{1, \dots, k\}$ について第 i_j 座標が v_j になるような $\mathbb{R}^n$ の点全体とし， $B(\sigma, v)$ を任意の $j \in \{1, \dots, k\}$ について第 i_j 座標が v_j になり，それ以外の座標が無理数に属するような $\mathbb{R}^n$ の点全体の集合とする．このとき E_k の定義から任意の $\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in Z(n, k)$ と $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{Q}^k$ について $E_k \cap A(\sigma, v) = B(\sigma, v)$ となる．ゆえに $B(\sigma, v)$ は E_k の閉集合である．さらに $B(\sigma, v)$ は $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{n-k}$ と同相なので 0 次元である．さて E_k の定義から

$$E_k = \bigcup_{\sigma \in Z(n, k)} \bigcup_{v \in \mathbb{Q}^k} B(\sigma, v)$$

が成り立ち，各 $B(\sigma, v)$ は E_k の閉集合かつ 0 次元で $Z(n, k)$ と $\mathbb{Q}^{n-k}$ は高々可算集合なので命題 10 から $\dim_T E_k = 0$ が従う．さらに明らかに $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^n E_k$ なので $\dim_T \mathbb{R}^n \leq n$ がわかる．次に $\mathbb{S}^n$ について考えよう．は $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化であり， $\mathbb{S}^n = (E_0 \cup \{\infty\}) \cup \bigcup_{k=1}^n E_k$ である．そして命題 10 から $\dim_T(E_0 \cup \{\infty\}) = 0$ なので， $\dim_T \mathbb{S}^n \leq n$ がわかる．□

注意． 一般に $\dim_T \mathbb{R}^n = \dim_T \mathbb{S}^n = n$ が示せるが，証明は面倒である．しかしこの文章で証明を行う．

2 前回までのあらすじ改・大きいのと小さい帰納的次元

定義 17. X を位相空間とする． $S \subset X$ とする．このとき S の境界集合を $\partial_X S$ で表す． $x \in \partial_X S$ であるとは任意の x の近傍 H について $H \cap S \neq \emptyset$ かつ $H \setminus S \neq \emptyset$ を意味する．一般に $\partial_X S = \text{CL}_X S \setminus \text{Int}_X S$ である．ここで CL_X , Int_X は X における閉包と開核を表す．

補題 18. X を位相空間とし， $A \subset S \subset X$ とする．このとき $\partial_S A \subset S \cap \partial_X A$ が成り立つ．

証明． 一般に位相空間 T と $M \subset T$ について $P \subset M \subset H$ となる開集合 O と閉集合 C について $\partial_T M \subset H \setminus P$ であり， $\partial_T M = \text{CL}_T(A) \setminus \text{Int}_T(A)$ に注意しよう．

さて， $O = \text{Int}_X A$ で $C = \text{CL}_X A$ とおく．すると $O \cap S$ と $C \cap S$ はそれぞれ S の開集合と閉集合で $O \cap S \subset A \subset C \cap S$ を満たす．よって $\partial_S A \subset (C \cap S) \setminus (O \cap S)$ を満たす．

す. ここで $(C \cap S) \setminus (O \cap S) = (C \setminus O) \cap S = (\text{CL}_X A \setminus \text{Int}_X A) \cap S = \partial_X S$ となる. これは $\partial_S A \subset \partial_X S$ を意味する. $\square$

補題 19. X を位相空間とし, $N \subset A \subset X$ とする. すると N が A の開集合であるとき $\partial_A N = A \cap (\text{CL}_X(N) \setminus N)$ が成り立つ.

証明. まず $\partial_A(N) = \text{CL}_A(N) \setminus \text{Int}_A(N)$ である. ここで N は A の開集合なので $\text{Int}_A N = N$ である. そして $\text{CL}_A(N) = A \cap \text{CL}_X N$ なので*2すると $\partial_A(N) = \text{CL}_A(N) \setminus \text{Int}_A(N) = A \cap \text{CL}_X N \setminus N = A \cap (\text{CL}_X N \setminus N)$ が成り立つ. $\square$

補題 20. X を可分距離化可能空間とし, A を $A \subset X$ で $\dim_T A = 0$ とする. そして K を X の閉集合とし X の開集合 U は $K \subset U$ を満たしているとする. このとき X 内の開集合 W が存在して $K \subset W \subset U$ と $A \cap \partial_X W = \emptyset$ が成り立つ.

証明. まず X の正規性から開集合 V であって $K \subset V$ と $\text{CL}_X(V) \subset U$ となるものをとる. そして $L = \text{CL}_X(V)$ とおく. ここで $\dim_T A = 0$ より $K \cap A$ の近傍 $N \subset A$ で $L \cap A \subset N \subset U \cap A$ となるものが存在する. ここで $\partial_A N = \emptyset$ に注意しよう. いま N と $A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)$ について考える. 明らかに

$$\text{CL}_X(N) \cap (A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)) = \emptyset$$

であり

$$\begin{aligned} & \text{CL}_X(K) \cap (A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)) \\ & \subset \text{CL}_X(K) \cap (A \setminus \text{CL}_X(N)) \\ & \subset \text{CL}_X(K) \cap (A \setminus (L \cap A)) \\ & \subset \text{CL}_X(K) \cap (A \setminus (K \cap A)) \\ & = K \cap (A \setminus (K \cap A)) \\ & = (K \cap A) \setminus (K \cap A) \\ & = \emptyset \end{aligned}$$

*2 この等式は一般に成り立つ

であるから $\text{CL}_X(N \cup K) \cap (A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)) = \emptyset$ である。さらに

$$\begin{aligned}
& N \cap \text{CL}_X(A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)) \\
& \subset N \cap \text{CL}_X(A \setminus \text{CL}_X(N)) \\
& = N \cap A \cap \text{CL}_X(A \setminus \text{CL}_X(N)) \\
& = N \cap A \cap \text{CL}_A(A \setminus (A \cap \text{CL}_X(N))) \\
& = N \cap A \cap \text{CL}_A(A \setminus \text{CL}_A(N)) \\
& = N \cap \text{CL}_A(A \setminus \text{CL}_A(N)) \\
& = N \cap ((A \setminus \text{CL}_A N) \cup \partial_A N) \\
& = N \cap (A \setminus \text{CL}_A N) = \emptyset
\end{aligned}$$

である。また $K \subset V$ であることと $X \setminus V$ が閉集合であることから

$$\begin{aligned}
& K \cap \text{CL}_X((A \setminus \text{CL}_X(N \cup L))) \\
& \subset K \cap \text{CL}_X(A \setminus \text{CL}_X(L)) \\
& = K \cap \text{CL}_X(A \setminus L) \\
& \subset K \cap \text{CL}_X(X \setminus L) \\
& \subset K \cap \text{CL}_X(X \setminus V) \\
& \subset K \cap (X \setminus V) \\
& \subset V \cap (X \setminus V) \\
& = \emptyset
\end{aligned}$$

がわかる。故に $(N \cup K) \cap \text{CL}_X(A \setminus \text{CL}_X(N)) = \emptyset$ である。以上のことから $N \cup K$ と $A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)$ は互いにもう一方の閉包と交わらない。よって X の完全正規性から X の開集合 W が存在して $N \cup K \subset W$ と $\text{CL}_X(W) \cap (A \setminus \text{CL}_X(N \cup L)) = \emptyset$ を満たす。後半の条件から

$$A \cap \text{CL}_X W \subset A \cap \text{CL}_X(N \cup L)$$

がわかる。ここで $\text{CL}_X(N \cap L) = \text{CL}_X N \cup \text{CL}_X L = \text{CL}_X N \cup L$ であり、 $L \cap A \subset N$ なので

$$A \cap \text{CL}_X W \subset A \cap \text{CL}_X N$$

がわかる。必要なら W を $V \cap W$ に置き換えて $W \subset V$ としてもよい。さて以上と補題 19 を踏まえると

$$\begin{aligned}
A \cap \partial_X W &= A \cap (\text{CL}_X(W) \cap (X \setminus W)) \subset A \cap \text{CL}_X(N) \cap (X \setminus N) \\
&= A \cap (\text{CL}_X(N) \setminus N) = \partial_A N = \emptyset
\end{aligned}$$

を得る。ゆえに $A \cap \partial_X W = \emptyset$ がわかる。 □

定理 21. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を可分距離化可能空間とする. このとき以下は同値である.

- (1) $\dim_T X \leq n$ である.
- (2) X の任意の閉集合 K と任意の開集合 U が $K \subset U$ を満たしているならば開集合 V が存在して $K \subset V \subset \text{CL}_X V \subset U$ かつ $\dim_T \partial_X V \leq n - 1$
- (3) X の開基 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $\dim_T \partial_X V_i \leq n - 1$ である.

(1) $\implies$ (2) の証明. : (1), つまり $\dim_T X \leq n$ という仮定から X の部分集合 $A_0, \dots, A_n$ が存在して $\dim_T A_i \leq 0$ と $\bigcup_{i=0}^n A_i = X$ を満たす. ここで X の任意の閉集合 K と任意の開集合 U が $K \subset U$ を満たしているとしよう. すると補題 20 より, X の開集合 V が存在して $K \subset V$ と $\text{CL}_X V \subset U$ と $A_0 \cap \partial_X V = \emptyset$ を満たす. すると $\dim_T$ の定義より $\dim_T \partial_X V \leq n - 1$ となる. これで (2) が示された.

[(2) $\implies$ (3) の証明]: X の可算開基 $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ をとる. そして

$$\mathcal{C} = \{(B_i, B_k) \mid B_i, B_k \in \mathcal{B}, \text{CL}(B_i) \subset B_k\}$$

と定義する. このとき $\mathcal{C}$ はたかだか可算集合であることに注意しよう. そして $(B_i, B_k) \in \mathcal{C}$ となる B_i と B_k について $\text{CL}_X(B_i)$ と B_k に条件 (2) を適応して開集合 $V_{i,k}$ で $\text{CL}_X(B_i) \subset V_{i,k}$ と $\text{CL}(V_{i,k}) \subset B_k$ そして $\dim_T \partial_X V_{i,k} \leq n - 1$ となるものが存在する. このとき $\{V_{i,k}\}$ は X の開基になるので (3) が示された.

[(3) $\implies$ (1) の証明]: 今 X の開基 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $\dim_T \partial_X V_i \leq n - 1$ を満たすとする. このとき定理 13 より $S = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_X V_i$ は $\dim_T S \leq n - 1$ を満たす. さらに $A = X \setminus S$ とおくと, $\{A \cap V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は A の開基になる. そして補題 18 より $\partial_A V_i \subset A \cap \partial_X V_i = \emptyset$ なので $\dim_T A \leq 0$ がわかる. そして $X = S \cup A$ なので補題 6 より $\dim_T X \leq n$ がわかる. $\square$

定義 22 (小さい帰納次元). 空間 X の小さい帰納次元を帰納的 $\text{ind} X$ に次のように定義する.

$\text{ind} X = -1 \iff X = \emptyset$ とし, $n - 1$ まで定義されたとして

$\text{ind} X \leq n \iff X$ の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対して x の近傍 N が存在して $\text{ind}(\partial N) \leq n - 1$ かつ $N \subset U$ を充たす.

と定義する. ちなみに $\text{ind} X = n$ とは $\text{ind} X \leq n$ かつ $n - 1 < \text{ind} X$ である.

伝統的な小さい帰納次元と大きい帰納次元の定義を紹介する.

定義 23 (小さい帰納次元). 空間 X の小さい帰納次元を帰納的 $\text{ind} X$ に次のように定義

する。

$\text{ind}X = -1 \iff X = \emptyset$ とし、 $n - 1$ まで定義されたとして

$\text{ind}X \leq n \iff X$ の任意の点 x と x の任意の近傍 U に対して x の近傍 N が存在して $\text{ind}(\partial N) \leq n - 1$ かつ $N \subset U$ を満たす。

と定義する。ちなみに $\text{ind}X = n$ とは $\text{ind}X \leq n$ かつ $n - 1 < \text{ind}X$ である。

定義 24 (大きい帰納次元). 空間 X の大きい帰納次元を帰納的 $\text{Ind}X$ に次のように定義する。

$\text{Ind}X = -1 \iff X = \emptyset$ とし、 $n - 1$ まで定義されたとして

$\text{Ind}X \leq n \iff X$ の閉集合 K と開集合 U で $K \subset U$ を満たすものについて開集合 V が存在して $K \subset V$ と $\text{CL}V \subset U$ そして $\text{Ind}\partial V \leq n - 1$ を満たす。

と定義する。ちなみに $\text{Ind}X = n$ とは $\text{Ind}X \leq n$ かつ $n - 1 < \text{Ind}X$ である。

定理 21 から次のことが従う。

系 25. 可分距離化可能空間 X について $\text{ind}X = \text{Ind}X = \dim_T X$

注意. 本来は ind を定義したのちに $\text{ind} \leq n$ ならば $n + 1$ 個の 0 次元空間の和集合としてかけることを証明するのだが、この文章では逆にそちらを位相次元の定理にしている。

補題 26. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。このとき $\dim_T \mathbb{R}^n \leq n$ と $\dim_T \mathbb{S}^n \leq n$ が成り立つ。

ind を使った別証明. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。 $\mathbb{R}^{m+1}$ と $\mathbb{S}^{m+1}$ はともに境界が $\mathbb{S}^m$ となる開集合からなる開基を持つ。よって $\dim_T \mathbb{R}^{m+1} \leq \dim_T \mathbb{S}^m$ と $\dim_T \mathbb{S}^{m+1} \leq \dim_T \mathbb{S}^m$ が成り立つ。 $\mathbb{S}^1$ は境界が 2 点になるような開集合からなる開基を持つから $\dim_T \mathbb{S}^1 \leq 1$ である。もしくは $\mathbb{R}$ が有理数と無理数という二つの 0 次元集合の和であることと $\mathbb{S}^1$ が $\mathbb{R}$ の一点コンパクト化であることを用いても $\dim_T \mathbb{S}^1 \leq 1$ であることがわかる。よって帰納的に $\dim_T \mathbb{R}^n \leq n$ と $\dim_T \mathbb{S}^n \leq n$ が成り立つことがわかる。 $\square$

3 今回のお話

命題 27 (ウリゾーンの補題のちょっと良い版). X を距離化可能空間とし、 F と H をその閉集合とし、 $F \cap H = \emptyset$ と仮定する。このとき連続写像 $f: X \rightarrow [0, 1]$ で $f^{-1}(\{0\}) = F$ かつ $f(H) \subset \{1\}$ となるものが存在する。

証明. X の位相を生成する距離関数を h とする。必要なら $\min\{h, 1\}$ と取り替えるこ

とによって最初から $h \leq 1$ と仮定しても良い。さてウリゾーンの補題から連続写像 $g: X \rightarrow [0, 1]$ であって $g(F) \subset \{0\}$ かつ $g(H) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する。このとき $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ を $d(x, y) = \max\{h(x, y), |g(x) - g(y)|\}$ と定義する。すると g の連続性から h の位相に関する仮定から d も X と同じ位相を生成する。このとき g の取り方から $d(F, H) = 1$ になることに注意せよ (一般に交わらない閉集合同志の距離が 0 になることがある。そういう状況を避けるために上記のような距離の修正をしている)。そして $f: X \rightarrow [0, 1]$ を $f(x) = d(x, F)$ と定義するとこの f は求める条件を全て満たす。□

注意. 実際は距離空間であることを用いると $F = f^{-1}(\{0\})$ かつ $H = f^{-1}(\{1\})$ となる連続写像の存在が示せるが、そこまで強い性質の写像の存在は以下では使わない。どうやって構成するかというと、命題 27 を F と H に 2 回適応して適当にアフィン変換を噛ませて $g: X \rightarrow [0, 1]$ と $u: X \rightarrow [1/2, 1]$ で $F = g^{-1}(\{0\})$, $H \subset g^{-1}(\{1\})$, $F \subset u^{-1}(\{1/2\})$, $H = u^{-1}(\{1\})$ となるものを得る。そして $f: X \rightarrow [0, 1]$ を $f(x) = g(x) \cdot u(x)$ と定義すると、 $F = f^{-1}(\{0\})$ かつ $H = u^{-1}(\{1\})$ となる。このようなことは一般的には X が正規空間で F と H がともに G_δ 閉集合であるときに成り立つ。

定義 28. X を位相空間とし A, B, C をその部分集合とする。 $A \cap B = \emptyset$ と仮定する。このとき C が A と B を分離するとは開集合 U と V が存在して $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ そして $X \setminus C = U \sqcup V$ を満たす時にいう。この時必然的に C は閉集合になることに注意しよう。

命題 29. X を距離空間とし、 A と B , L はその閉部分集合で L は A と B を分離しているとする。このとき連続写像 $f: X \rightarrow [-1, 1]$ で $f(A) \subset \{-1\}$, $L = f^{-1}(\{0\})$, $f(B) \subset \{1\}$ を満たすものが存在する。

証明. 開集合 U と V を $X \setminus L = U \cup V$ で $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$ と $B \subset V$ を満たすものとする。命題 27 を $U \cup L$ と $V \cup L$ にそれぞれ適応して連続写像 $g: U \cup L \rightarrow [-1, 0]$ と $h: V \cup L \rightarrow [0, 1]$ で $g(A) \subset \{-1\}$, $L = g^{-1}(\{0\})$, $h(B) \subset \{1\}$, $L = h^{-1}(\{0\})$ を満たすものをとる。さてここで写像 $f: X \rightarrow [-1, 1]$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in U \cup L \\ h(x) & x \in V \cup L \end{cases}$$

と定義する。このとき $(U \cup L) \cap (V \cup L) = L$ で L 上では g と h が同じ値を取るなので f が貼り合わさって、ちゃんと定義され、さらに連続写像になることがわかる。この f が求める条件を満たすのは g と h の満たす条件から従う。□

定理 30. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, X を可分距離化可能空間で $\dim_T X \leq n$ を満たすものとする. そして $n+1$ 個の閉集合の組み $(A_0, B_0), \dots, (A_n, B_n)$ は $A_i \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする. このとき $n+1$ 個の X の閉集合 $L_0, \dots, L_n$ が存在して L_i は A_i と B_i を分離し, $\bigcap_{i=0}^n L_i = \emptyset$ を満たす.

証明. $\dim_T X \leq n$ なので, $R_0, \dots, R_n$ が存在して $\dim_T R_i \leq 0$ と $X = \bigcup_{i=0}^n R_i$ を満たす. 各 i について A_i と $X \setminus B_i$ と R_i に補題 20 を適応して X の開集合 V_i であって $A_i \subset V_i$ と $\text{CL}_X V_i \subset X \setminus B_i$ そして $R_i \cap \partial_X V_i = \emptyset$ を満たす. このとき $L_i = \partial_X V_i$ とおけば L_i は A_i と B_i を分離し $R_i \cap L_i = \emptyset$ である. このとき $R_i \cap \bigcap_{k=0}^n L_k \subset R_i \cap L_i = \emptyset$ なので $\bigcap_{i=0}^n L_i = \emptyset$ である. $\square$

定理 31. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, X を可分距離化可能空間で $\dim_T X \leq n$ を満たすものとする. そして $n+1$ 個の閉集合の組み $(A_0, B_0), \dots, (A_n, B_n)$ は $A_i \cap B_i = \emptyset$ を満たすとする. このとき各 i ごとに連続写像 $f: X \rightarrow [-1, 1]$ が存在して $A_i \subset f^{-1}(\{-1\})$ と $B_i \subset f^{-1}(\{1\})$ そして $\bigcap_{i=0}^n f_i^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ を満たす.

証明. 定理 30 より $n+1$ 個の閉集合 $L_0, \dots, L_n$ が存在して L_i は A_i と B_i を分離し, $\bigcap_{i=0}^n L_i = \emptyset$ を満たすものが存在する. そして命題 29 より連続写像 $f_i: X \rightarrow [-1, 1]$ であって, $A_i \subset f^{-1}(\{-1\})$ と $B_i \subset f^{-1}(\{1\})$ および $f^{-1}(\{0\}) = L_i$ を満たすものが存在する. このとき L_i の性質から $\bigcap_{i=0}^n f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ となる. $\square$

定義 32. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 位相空間 X 上の二つの連続写像 $f_0, f_1: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ について連続写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ が f_0 と f_1 を結ぶ一様ホモトピーであるとは $H(x, 0) = f_0(x)$, $H(x, 1) = f_1(x)$ を満たしそして任意の $\epsilon \in (0, \infty)$ についてある $\delta \in (0, \infty)$ が存在して $s, t \in [0, 1]$ が $|s - t| < \delta$ を満たすならば任意の $x \in X$ について $\|H(x, s) - H(x, t)\| < \epsilon$ が成り立つときにいう. このような H が存在するときに f_0 と f_1 は一様ホモトピックと呼ぶことにする.

定義 33. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. このとき $\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とし $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ と定義する. ここでノルム $\|*\|$ は通常の内積から誘導されるノルムとする. つまり $\mathbf{D}^n$ は n 次元閉球体で $\mathbf{S}^{n-1}$ はその境界である $n-1$ 次元球面である.

定義 34. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $i \in \{1, \dots, n\}$ とする. このとき $\mathbf{I}^n = [-1, 1]^n$ と定義し $\mathbf{I}_+^{n,i} = \{x \in \mathbf{I}^n \mid x_i = 1\}$ で $\mathbf{I}_-^{n,i} = \{x \in \mathbf{I}^n \mid x_i = -1\}$ と定義する. さらに $\partial \mathbf{I}^n$ を $\mathbf{I}^n$ の境界集合とする. このとき $\partial \mathbf{I}^n = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{I}_+^{n,i} \cup \mathbf{I}_-^{n,i}$ であることに注意しよう. また $\mathbf{I}^n$ は $\mathbf{D}^n$ に同相であり, $\partial \mathbf{I}^n$ は $\mathbf{S}^{n-1}$ に同相であることに注意しよう.

命題 35. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし X を T_1 正規空間とし A をその閉集合とする. このとき二つの写像 $f_0: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ と $f_1: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ が一様ホモトピックであるとする. このとき f_0 が X への拡張 $g_0: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を持つならば f_1 も拡張 $g_1: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を持つ.

証明. 連続写像 $H: A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を f_0 と f_1 を結ぶ一様ホモトピーとする. このとき一様ホモトピーの定義から適切に $[0, 1]$ の有限点列 $r_0, \dots, r_m$ をとれば任意の $x \in X$ と $i \in \{0, \dots, m-1\}$ について $\|H(x, r_i) - H(x, r_{i+1})\| < 1$ が成り立つ. よって f_0 と f_1 が一様ホモトピックであるという仮定の代わりに $\|f_0(x) - f_1(x)\| < 1$ を満たすという仮定の元で定理を証明すれば上記の $H(x, r_i)$ を使って帰納的に定理を証明することができる. 以下では $\|f_0(x) - f_1(x)\| < 1$ の仮定の元 f_1 の拡張を構築する.

まずティエーチェの拡張定理を使って f_1 の拡張となる連続関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を得る. そして

$$V = \{x \in X \mid \|g_0(x) - g(x)\| < 1\}$$

と定義すると V は開集合である. ここで A 上で $\|f_0(x) - f_1(x)\| < 1$ となるという仮定から $A \subset V$ である. さてウリゾーンの補題から連続写像 $\phi: X \rightarrow [0, 1]$ で A 上で 1 を常にとり $X \setminus V$ 上で恒等的に 0 となるものが存在する. ここで $h: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$h(x, t) = (1 - t)g_0(x) + tg(x)$$

と定義するとこれは連続写像になる. 今から $h(x, \phi(x))$ が任意の $x \in X$ についてノンゼロであることを証明しよう.

まず $x \in V$ については g_0 の値域は $\mathbf{S}^n$ なので任意の $t \in [0, 1]$ について以下の計算を得る.

$$\begin{aligned} \|h(x, t)\| &\geq \|g_0(x)\| - \|g_0(x) - h(x, t)\| \\ &= \|g_0(x)\| - \|tg_0(x) - tg(x)\| \\ &= \|g_0(x)\| - t\|g_0(x) - g(x)\| \\ &\geq \|g_0(x)\| - 1 \cdot \|g_0(x) - g(x)\| \\ &> \|g_0(x)\| - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり $h(x, t) \neq 0$ である. 特に $h(x, \phi(x)) \neq 0$ である.

次に $x \notin V$ の時は $\phi(x)$ が 0 の値を取り続けることから恒等的に $h(x, \phi(x)) = g_0(x)$ である. 特に $h(x, \phi(x)) \neq 0$ である. 以上から任意の $x \in X$ で $h(x, \phi(x)) \neq 0$ となるこ

とがわかった．そこで $g_1: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を

$$g_1(x) = \frac{h(x, \phi(x))}{\|h(x, \phi(x))\|}$$

と定義すれば $x \in A$ 上では確かに f_1 と一致する．これで証明が終わる． $\square$

定理 36. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．そして X を可分距離化可能空間で $\dim_T X \leq n$ を満たしているとする．このとき任意の閉集合 A 上の任意の連続関数 $f: A \rightarrow \mathbf{S}^n$ は X 上への拡張となる連続関数 $g: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を持つ．

証明. 位相的には同じなので $\mathbf{S}^n$ と $\partial \mathbf{I}^{n+1}$ を同一視する．よって f は $f: A \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$ である．そして $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ とし

$$K_i = \{x \in A \mid f_i(x) = -1\}$$

$$L_i = \{x \in A \mid f_i(x) = 1\}$$

とすると K_i と L_i は X の閉集合でなおかつ $K_i \cap L_i = \emptyset$ を満たしさらに

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (K_i \cup L_i)$$

となる．ここで定理 31 から各 i について連続写像 $u_i: X \rightarrow [-1, 1]$ が存在して $K_i \subset u_i^{-1}(\{-1\})$, $L_i \subset u_i^{-1}(\{1\})$ を満たしさらに $\bigcap_{i=1}^{n+1} u_i^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ となるものが存在する．ここで

$$u: X \rightarrow [-1, 1]^{n+1}$$

を $u = (u_1, \dots, u_n)$ と定義する．ここで $A = \bigcup_{i=1}^{n+1} (K_i \cup L_i)$ と u_i の性質から $x \in A$ のとき $u(x)$ は $\partial \mathbf{I}^{n+1}$ への写像になる．ここで $v = u|_A: A \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$ とおく．そして $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$H(x, t) = (1 - t)v(x) + tf(x)$$

と定義する．この H が一様ホモトピーとなることを見よう．任意の $s, t \in [0, 1]$ に対して

$$\|H(x, s) - H(x, t)\| = |s - t| \cdot \|v(x) - f(x)\|$$

となる． v と f の値域はともに $\partial \mathbf{I}^{n+1}$ であるから適切な実数 $M > 0$ が存在して任意の $x \in A$ について $\|v(x) - f(x)\| < M$ であるから H は v と f を結ぶ一様ホモトピーである．

ここで v が X 上へ拡張できることを見よう．関数 v は u の制限であった．そして $\bigcap_{i=1}^{n+1} u_i^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ であるから u の像には 0 を含んでいないので， 0 から $u(x)$ へ直線を伸ばして $\partial \mathbf{I}^{n+1}$ との交点を $w(x)$ と定義するとこれは A 上では v に一致する連続関数 $w: X \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$ である．よって v は X への拡張 $w: X \rightarrow \partial \mathbf{I}^{n+1}$ を持つ．よって一様ホモトピー H の存在から命題 35 より f は拡張 $g: X \rightarrow \mathbf{S}^n$ を持つ． $\square$

注意． 実はこれらの性質は正規空間上での被覆次元の特徴づけになっているのだが，ここではその話は省略する．長いので，被覆次元の話も省略する．もしかしたらこの文章の続きを書く可能性がなくもない．

4 領域不変性定理

以下の定理によりユークリッド空間内のコンパクト部分集合 K の境界点は K の位相的言明のみで特徴付けできることがわかる．これが領域不変性定理の肝である．

定理 37. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とする．このとき $p \in \partial_{\mathbb{R}^n} K$ となるための必要十分条件は p の K 内の任意の近傍 N について p の K 内の開近傍 U であって $U \subset N$ を満たしかつ任意の連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ は連続な拡張 $g: K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を持つようなものが存在することである．

証明． まず最初に $p \in \partial K$ を仮定して定理の条件を導く． N を p の任意の近傍とする．そして B を p を中心とする十分小さい半径を持つ開球で $K \cap B \subset N$ を満たすものとする．このとき $U = K \cap B$ が条件を満たすことを見よう．ここで $L = \partial B$ とすると L は $\mathbf{S}^{n-1}$ と同相である．今ここで任意の連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を考える．ここで $K \setminus U$ は K の閉集合である．特に $\mathbb{R}^n$ の閉集合でもある．ここで $\dim_T L \leq n-1$ なので $\dim_T(K \cap L) \leq n-1$ である．ここで $L \cap K \subset K \setminus U$ に注意して定理 36 から連続写像 $f|_{L \cap K}: L \cap K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ の拡張である連続写像 $u: L \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る．さて L と $K \setminus U$ の共通部分は $L \cap K$ で，この上では u と f は同じ値を取るので写像が貼り合わさって連続写像 $h: (K \setminus U) \cup L \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る．そして p が K の境界なので B の点であって K に属さないもの q を取ることができる．任意の点 $x \in K$ について q から $x \in K$ へ伸ばした直線と L との交点を $b(x)$ とする．このとき $b: X \rightarrow L$ は連続写像である．そして

$g: X \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を

$$g(x) = \begin{cases} h(b(x)) & x \in U \cup (L \cap K) \\ f(x) & x \in K \setminus U \end{cases}$$

と定義するとこれら二つの関数 $h(b(x))$ と $f(x)$ は $L \cap K$ 上で値が一致するのでちゃんと張り合って連続関数になる．この g はちゃんと f の拡張になっている．

逆に $p \in K$ が定理の条件を満たすとしよう．背理法のために $p \in K$ は K の内点であるとする．ここで p を中心とする十分小さい半径を持つ開球 B で $\text{CL } B \subset K$ となるものを考える．すると定理の仮定より p の開近傍 U で $U \subset B$ で任意の連続関数 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ が K 上に拡張するものが存在する．ここで写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を以下のように定義する．点 p から $x \in K \setminus U$ へと直線を伸ばし ∂B との交点を $f(x)$ とする．これは連続写像で ∂B は $\mathbf{S}^{n-1}$ と同相なのでちゃんと連続写像 $f: K \setminus U \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ を得る．このとき f は ∂B 上で恒等写像になることに注意しよう．すると定理の条件より連続写像 $g: K \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ が存在する．さて $\text{CL } B \subset K$ であった．このとき $g|_{\text{CL } B}: \text{CL } B \rightarrow \partial B$ を考えると $g|_{\text{CL } B}$ は $\text{CL } B$ から ∂B へのレトラクトになる．これは No retract theorem に矛盾するので $p \in K$ は境界点でなければならない． $\square$

注意． 上記の定理において非自明な部分は球面への写像を拡張する定理 36 と *No retract Theorem* である．さらに定理 36 は $X = \mathbf{S}^{n-1}$ に対するものだけを用いているし、 $\mathbf{S}^{n-1}$ を南と北の半球に分ければ、結局利用しているのは $n-1$ 次元円盤 $\mathbf{D}^{n-1}$ (あるいは $n-1$ 次元立方体) に対する定理 36 のみである．なので、*No retract Theorem* は楽に証明する方法は特にないが (せいぜい積分の変数変換を使う方法など)、円盤に対する定理 36 は簡単に証明できる可能性があり、領域不変性定理もある程度楽になる可能性がある．

いよいよ領域不変性定理を証明する．

定理 38 (領域不変性定理)． $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続単射とする．このとき $f(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

証明． 任意の $p \in U$ について $f(p)$ が $f(U)$ の内点であることを証明すれば良い． p の十分小さい近傍 N で $\text{CL } N$ がコンパクトで $\text{CL } N \subset U$ であるものをとる．このとき $f|_{\text{CL } N}$ を考えると f はコンパクト集合からハウスドルフ空間への連続単射なので位相的埋め込みになる．定理 37 より点 p が境界点かどうかは $\text{CL } N$ の内在的な位相的条件で特徴づけられる．つまり p は $\text{CL } N$ の内点であるから $f(p)$ は $f(\text{CL } N)$ の内点になる．よって特に $f(p)$ は $f(U)$ の内点である． $\square$

系 39. M と N を同じ次元の境界つき多様体とし $f: M \rightarrow N$ を同相写像とする. このとき f は ∂M を ∂N に移す.

証明. もしも f が $p \in \partial M$ を $N \setminus \partial N$ に移すと, f^{-1} を考えることによって局所的にはユークリッド空間の内点が p に写っていることになるが, p は上半平面の境界点なので領域不変性定理に矛盾する. $\square$

5 ユークリッド空間の次元

電波通信 [3] で以下のことを証明した.

定理 40. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について以下は同値であり, また, (1) もしくは (2) は成り立つことがよく知られているので, 以下のすべての主張は正しい.

- (1) (*No retraction theorem*) レトラクション $r: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ は存在しない.
- (2) (*Brouwer's fixed point theorem*) 任意の連続写像 $f: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$ は不動点を持つ.
- (3) $i \in \{1, \dots, n\}$ を添字とする閉集合 $C_i \subset \mathbf{I}^n$ の族が $\mathbf{I}_+^{n,i}$ と $\mathbf{I}_-^{n,i}$ を分離するならば $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ を成り立つ.
- (4) (*the Poincaré-Miranda theorem*) $i \in \{1, \dots, n\}$ を添字とする連続写像の族 $f_i: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が $f_i(\mathbf{I}_+^{n,i}) \subset [0, \infty)$ と $f_i(\mathbf{I}_-^{n,i}) \subset (-\infty, 0]$ を満たすならば, ある点 $p \in \mathbf{I}^n$ が存在して $f_i(p) = 0$ が成り立つ. つまり共通零点が存在する.

この定理 40 の (3), もしくは (4) と定理 30 の対偶あるいは定理 31 の対偶を使うと以下の定理を得る.

定理 41. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. このとき $\mathbf{D}^n$ と $\mathbb{R}^n$ の次元はちょうど n である.

系 42. $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. もしも $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ が同相ならば $m = n$ である.

系 43. $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $A_1, \dots, A_k$ は $\dim_T A_i \leq 0$ と $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$ が成り立っているとする. このとき $n + 1 \leq k$ である.

定理 40 定理 38 系 42 はなんだか同値っぽい感じがする. もちろん正しい命題はすべて同値になるのだが, もうちょっと深い意味で同値のような感じがする. 実際 [6] では, この同値っぽさを逆数学の上で論じている. 逆数学に詳しくないので私は深くは解説できないのだ.

ところで次元論を仲介しない領域不変性定理の証明はテレンス・タオ [9] がブログで証明しているようだ. この証明に対して伝統的な証明はなんなんだと興味を持ったのがこの文書を書くきっかけになった.

参考文献

- [1] 電波通信「不動点定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2017/08/27/182714>
- [2] 電波通信, 「次元論ショートコース: 0次元から始める位相次元」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2022/03/12/161532>
- [3] 電波通信, 「不動点定理と同値な命題」, <https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2026/04/05/181441>
- [4] M. G. Charalambous, *Dimension theory. A selection of theorems and counterexamples* Springer/Atlantis Press (2019).
- [5] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948
- [6] T. Kihara, *The Brouwer invariance theorems in reverse mathematics*, Forum of Mathematics, Sigma, vol.8, 2020, doi: 10.1017/fms.2020.52.
- [7] C. Kuratowski, *Une Méthode de Prolongement des Ensembles Relativement Fermés ou Ouverts*, Colloq. Math. 1 (1948), 273-278, doi:10.4064/cm-1-4-273-278.
- [8] W. Kulpa, *The Poiancré–Miranda Theorem*, Amer. Math. Monthly 104, No. 6, 545–550 (1997) doi: 10.2307/2975081
- [9] T. Tao, *Brouwer’s fixed point and invariance of domain theorems, and Hilbert’s fifth problem*, <https://terrytao.wordpress.com/2011/06/13/brouwers-fixed-point-and-invariance-of-domain-theorems-and-hilberts-fifth-problem/>
- [10] A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press 1975.