

ブラウワーの不動点定理と同値な命題

ナンブキトラ

2026 年 4 月 16 日

この文書ではブラウワーの不動点定理と同値な命題を紹介する。同値性しか紹介しないので、実際にこれらを使って楽に不動点定理を証明できるとかそういう効能はない。一応閉球体からその境界へのレトラクトが存在しないことをホモロジーを用いて紹介している。これらの命題はおいおいユークリッド空間の位相次元を計算する記事だとか領域不変性定理の記事だとかで用いられる予定だとかである。

1 本文

定義 1. X を位相空間とし A, B, C をその部分集合とする。 $A \cap B = \emptyset$ と仮定する。このとき C が A と B を分離するとは開集合 U と V が存在して $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$ そして $X \setminus C = U \amalg V$ を満たす時にいう。この時必然的に C は閉集合になることに注意しよう。

まずは次の準備補題から始めよう。

補題 2. A を $[-1, 1]$ の閉集合で尚且つ $\{-1\}$ と $\{1\}$ を分離しているとする。そして $[-1, 1] \setminus A = U \amalg V$ とし $1 \in V$ とする。このとき V の任意の元 x について

$$|x - d(x, A)| \leq 1$$

である。

証明. まず最初に $0 \leq x - d(x, A)$ のときを考える。このとき $0 \leq d(x, A)$ なので $|x - d(x, A)| \leq x - d(x, A) \leq x \leq 1$ がわかる。次に $0 \leq d(x, A) - x$ のときを考える。このとき $c = \min A$ について、 A が $\{-1\}$ と $\{1\}$ を分離することから $-1 < c$ である。また U と V の定義と $1 \in V$ であることから $c < x$ である。よって $d(x, A) \leq |x - c| = x - c$ となる。すると $|x - d(x, A)| = d(x, c) - x = x - c - x = -c < 1$ となる。 $\square$

定義 3. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. このとき $\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ とし $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ と定義する. ここでノルム $\|\cdot\|$ は通常の内積から誘導されるノルムとする. つまり $\mathbf{D}^n$ は n 次元閉球体で $\mathbf{S}^{n-1}$ はその境界である $n-1$ 次元球面である.

定義 4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $i \in \{1, \dots, n\}$ とする. このとき $\mathbf{I}^n = [-1, 1]^n$ と定義し $\mathbf{I}_+^{n,i} = \{x \in \mathbf{I}^n \mid x_i = 1\}$ で $\mathbf{I}_-^{n,i} = \{x \in \mathbf{I}^n \mid x_i = -1\}$ と定義する. さらに $\partial \mathbf{I}^n$ を $\mathbf{I}^n$ の境界集合とする. このとき $\partial \mathbf{I}^n = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{I}_+^{n,i} \cup \mathbf{I}_-^{n,i}$ であることに注意しよう. また $\mathbf{I}^n$ は $\mathbf{D}^n$ に同相であり, $\partial \mathbf{I}^n$ は $\mathbf{S}^{n-1}$ に同相であることに注意しよう.

この文書の主定理は以下である.

定理 5. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について以下は同値である.

- (1) (*No retraction theorem*) レトラクション $r: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ は存在しない.
- (2) (*Brouwer's fixed point theorem*) 任意の連続写像 $f: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$ は不動点を持つ.
- (3) $i \in \{1, \dots, n\}$ を添字とする閉集合 $C_i \subset \mathbf{I}^n$ の族が $\mathbf{I}_+^{n,i}$ と $\mathbf{I}_-^{n,i}$ を分離するならば $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ を成り立つ.
- (4) (*the Poincaré-Miranda theorem*) $i \in \{1, \dots, n\}$ を添字とする連続写像の族 $f_i: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が $f_i(\mathbf{I}_+^{n,i}) \subset [0, \infty)$ と $f_i(\mathbf{I}_-^{n,i}) \subset (-\infty, 0]$ を満たすならば, ある点 $p \in \mathbf{I}^n$ が存在して $f_i(p) = 0$ が成り立つ. つまり共通零点が存在する.

証明. [(1) $\implies$ (2)] いつものやつである. 不動点を持たない連続写像 $f: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$ が存在するとしよう. このときこのとき $f(x)$ から x へと線分を伸ばして $\mathbf{S}^{n-1}$ と交わる点を $r(x)$ と定義すると, これは $\mathbf{S}^{n-1}$ 上では $r(x) = x$ を満たす. また x と y が十分近いときに $(1-t)f(x) + tx$ と $(1-t)f(y) + ty$ も十分近いという事実から r の連続性も従う (凸な基本近傍形が取れるなどの事実も使うのだろう). あるいは $(1-t)f(x) + tx$ のノルムが 1 になる $t > 0$ を二次方程式を解いて具体的に記述するのも良い. とにかく連続なレトラクション $r: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ が存在するので (1) に反し, 背理法により (2) が成り立つ.

[(2) $\implies$ (3)] 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\mathbf{I}^n$ の開集合 P_i, N_i を $\mathbf{I}^n \setminus C_i = N_i \coprod P_i$ で $\mathbf{I}_+^{n,i} \subset P_i$ かつ $\mathbf{I}_-^{n,i} \subset N_i$ を満たすものをとってくる. このような開集合の組みは複数個あり得るかもしれないがとにかく一つとってくる (C_i の補集合の連結成分が二つより大きいことがあり得るからである). そして写像 $m_i: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$m_i(x) = \begin{cases} d(x, C_i) & x \in C_i \cup P_i \\ -d(x, C_i) & x \in C_i \cup N_i \end{cases}$$

と定義する. このとき $C_i \cup P_i$ と $C_i \cup N_i$ はともに閉集合で, これらの共通部分である

C_i 上では $d(x, C_i)$ と $-d(x, C_i)$ は同じ値 0 を取り, $C_i \cup P_i$ と $C_i \cup N_i$ 上ではもちろん連続なので貼り合わさって m_i はちゃんと定義され連続になる. そして $f_i: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_i(x) = x_i - m_i(x)$$

と定義する. このとき $|f_i(x)| \leq 1$ となることを今から証明しよう. $x \in P_i$ のときのみ証明する. 他の場合と同様に証明できる. このとき $f_i(x) = x_i - d(x, C_i)$ である. まず $0 \leq x_i - d(x, C_i)$ のときは $0 \leq d(x, C_i)$ なので

$$|f_i(x)| = x_i - d(x, C_i) \leq x_i \leq 1$$

であるから求める結果が成り立つ. 次に $0 \leq d(x, C_i) - x_i$ の場合を調べる. このとき x を通る直線で $\mathbf{I}_+^{n,i}$ と $\mathbf{I}_-^{n,i}$ に垂直なもの, つまり $L = \{z \in \mathbf{I}^n \mid z_k = x_k, k \neq i\}$ を考える. そして a を $L \cap \mathbf{I}_+^{n,i}$ を構成する唯一の点とし同様に b を $L \cap \mathbf{I}_-^{n,i}$ を構成するただ唯一の点とする. つまり a は i 成分が 1 でそれ以外が x と同じ成分であり, b は i 成分が -1 でそれ以外が x と一致するものである. すると $L \cap C_i$ は L の部分集合として a と b を分離する. 今 L と $[-1, 1]$ を同一視すれば補題 2 が適応できて $|x_i - d(x, L \cap C_i)| \leq 1$ となる. さて $|f_i(x)|$ を計算しよう.

$$|f_i(x)| = d(x, C_i) - x_i \leq d(x, L \cap C_i) - x_i = |d(x, L \cap C_i) - x_i| \leq 1$$

以上の計算より求める不等式を得る. 上の議論からどんな状況においても $|f_i(x)| \leq 1$ が成り立つことがわかった. ここで写像 $f: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}^n$ を $f = (f_1, \dots, f_n)$ で定義する. さっき証明した不等式から f の地域はちゃんと $\mathbf{I}^n$ になっている. よって (2) から不動点 p が存在する. f の定義からこの p は $d(p, C_i) = 0$ を満たす. つまり $p \in \bigcap_{i=1}^n C_i$ なので $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ がわかるので (3) が成り立つ.

[(3) $\implies$ (4)] 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $L_{i,k} = \{x \in \mathbf{I}^n \mid |x_i| \leq 1 - 2^{-k}\}$ とおく. そして写像 $w_{i,k}: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}^n$ を

$$w_{i,k}(x) = x_i \cdot d(x, L_{i,k})$$

と定義する. そして $g_i: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}^n$ を $g_{i,k}(x) = f_i(x) + w_{i,k}(x)$ と定義する. この時常に $g_{i,k}(\mathbf{I}_+^{n,i}) \subset (0, \infty)$ で $g_{i,k}(\mathbf{I}_-^{n,i}) \subset (-\infty, 0)$ である. よって $C_{i,k} = g^{-1}(\{0\})$ は $\mathbf{I}_+^{n,i}$ と $\mathbf{I}_-^{n,i}$ を分離する閉集合である. 故に (3) から $\bigcap_{i=1}^n C_{i,k} \neq \emptyset$ である. この集合から点 p_k をとる. このとき $\mathbf{I}^n$ のコンパクト性から収束する部分列 $\{p_{\phi(k)}\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する. その収束先を p とする. さて $g_{i,k}$ は f_i に一様収束するので, $k \rightarrow \infty$ のとき $g_{i,\phi(k)}(p_{\phi(k)}) \rightarrow f_i(p)$ である. よって任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ について $f_i(p) = 0$ となる. つまり (4) が成り立つ.

[(4) $\implies$ (1)] まず $\mathbf{I}^n$ と $\mathbf{D}^n$, そして $\mathbf{S}^{n-1}$ と $\partial\mathbf{I}^n$ を同一視する. 背理法のためにレトラクション $r: \mathbf{I}^n \rightarrow \partial\mathbf{I}^n$ が存在すると仮定する. このとき r の各成分 r_i はもちろん $r_i(\mathbf{I}_+^{n,i}) \subset [0, \infty)$ と $r_i(\mathbf{I}_-^{n,i}) \subset (-\infty, 0]$ を満たすので, (4) からある $p \in \mathbf{I}^n$ が存在して $r(p) = 0$ を満たす. しかしこれは r の値域が $\partial\mathbf{I}^n$ であることに反するので上記のようなレトラクションは存在しえない. よって (1) が成り立つ. $\square$

上の定理だけだと, 同値性しか証明していないので, 不動点定理が実際に正しいのかどうかは判断できない. しかし以下のことが知られているので, 上で述べたすべての命題は正しいことがわかる.

定理 6. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ についてレトラクション $r: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ は存在しない.

証明. $n = 1$ のときは中間値の定理からレトラクションの不存在がわかる. 以下では $1 < n$ とする. また $H_i(*)$ でホモロジー群の関手を表すとする. 上記のようなレトラクションが存在したとしよう. このとき ι を $\mathbf{S}^{n-1}$ から $\mathbf{I}^n$ への包含写像として $r \circ \iota = 1_{\mathbf{S}^n}$ が成り立つので, $n - 1$ について

$$H_{n-1}(r) \circ H_n(\iota) = H_{n-1}(1_{\mathbf{S}^n}) = 1_{H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1})}$$

となる. 故に $H_{n-1}(\iota): H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbf{D}^n)$ は単射になる. ところで $H_{n-1}(\mathbf{D}^n) \cong \{0\}$ で $H_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ なので, 単射 $H_{n-1}(\iota)$ の存在はあり得ない. よってレトラクション r は存在しえない. $\square$

注意. 一応ホモロジーなどの結構高等な概念を使わずに, 逆関数定理や積分の変数変換公式を使ってブラウワーの不動点定理を証明できる. 電波通信の記事 [2] を参照のこと.

球面や球体のホモロジーの計算などは [1] などに載っている.

参考文献

- [1] みなずみ, web ページ数学ノート | 単純思考「切除定理」, <https://minazumi.com/math/note/tgy/ch02sec02.html>
- [2] 電波通信「不動点定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2017/08/27/182714>
- [3] W.Hurewicz and H.Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948
- [4] W. Kulpa, *The Poiancré–Miranda Theorem*, Am. Math. Mon. 104, No. 6, 545–550 (1997) doi: 10.2307/2975081