

Goursat's lemma

ナンブキトラ

2026 年 3 月 26 日

大昔に書いていた残骸を発見したが、これがなんの文献の記述によった物なのかわからなくなってしまった。

1 本文

定義 1. 二つの集合 A, B の直積 $A \times B$ の部分集合 S に対して,

$$S(\exists) = \{a \in A \mid \exists b \in B (a, b) \in S\}$$

$$(\exists)S = \{b \in B \mid \exists a \in A (a, b) \in S\}$$

と定義する。つまり, $S(\exists)$ は第一成分への射影で, $(\exists)S$ は第二成分への射影である。

注意. とんでもないノーテーションである。

また, $a \in A$ と $b \in B$ に対して

$$S\langle b \rangle = \{a \in A \mid (a, b) \in S\}$$

$$\langle a \rangle S = \{b \in B \mid (a, b) \in S\}$$

と定義する。つまり, スライスのことである。

以下では,

定義 2. 群 G に対して, $\text{SG}(G)$, $\text{NSG}(G)$ で G の部分群全体の集合, G の正規部分群全体の集合を表す。

定義 3. 二つの群 A, B について,

$$\text{Q}(A, B) =$$

$$\{(U, V, T, Y, \theta) \mid V \in \text{SG}(A), U \in \text{NSG}(V), Y \in \text{SG}(B), T \in \text{NSG}(B), \theta : V/U \xrightarrow{\sim} Y/T\}$$

と定義する。

補題 4. 群 A と B について写像 $L : \text{SG}(A \times B) \rightarrow \text{Q}(A, B)$ を以下のように定義する。 $G \in \text{SG}(A \times B)$ について,

$$L(G) = (G\langle 1_B \rangle, G(\exists), \langle 1_A \rangle G, (\exists)G, \theta_G)$$

と定義する。ここで, $G\langle 1_B \rangle$ は $G(\exists)$ の正規部分群, $\langle 1_A \rangle G$ は $(\exists)G$ の正規部分群であることに注意せよ。さらに $\theta_G : G(\exists)/G\langle 1_B \rangle \rightarrow (\exists)G/\langle 1_A \rangle G$ は以下で定義される写像である: $[a] \in G(\exists)/G\langle 1_B \rangle$ に対して,

$(a, b) \in G$ となる b を選び, $\theta_G([a]) = [b]$ と定義する. このとき θ_G は *well-defined* であり, さらに同型写像である. よって L はちゃんと定義されている.

証明. $\theta_G([a]) = [b]$ が b の選び方によらないことを示そう. もし, $(a, b), (a, c) \in G$ ならば, $(1_A, bc^{-1}) \in G$ なので, $bc^{-1} \in \langle 1_A \rangle G$ であるから, $[b] = [c]$ であり, 選び方によらない. よって θ_G は *well-defined* である. 次に θ_G が全単射であることを示そう. まず $(\exists)G$ の定義から, θ_G が全射であることがわかる. 単射性を示そう. $(a, b) \in G$ について $\theta_G(a) = [b] = [1_B]$ ならば, $b \in \langle 1_A \rangle G$ なので, $(1_A, b) \in G$ である. よって, $(a, b)(1_A, b)^{-1} = (a, 1_B) \in G$ だが, これは $a \in G\langle 1_B \rangle$ ということなので, $[a] = [1_A]$ となる. よって θ_G のカーネルが自明なので θ_G は単射である. $\square$

定義 5. $R: Q(A, B) \rightarrow \text{SG}(A \times B)$ を以下のように定義する. $q = (U, V, T, Y, \theta) \in Q(A, B)$ に対して $\tilde{G}_\theta = \{(x, \theta(x)) \in V/U \times Y/T \mid x \in V/U\}$ とする. そして, $p: V \times Y \rightarrow V/U \times Y/T$ を自然な全射として $R(q) = p^{-1}(\tilde{G}_\theta)$ と定義する. このとき $R(q)$ は $A \times B$ の部分群になっていることに注意しよう.

定理 6 (Goursat's lemma). 写像 $L: \text{SG}(A \times B) \rightarrow Q(A, B)$ と $R: Q(A, B) \rightarrow \text{SG}(A \times B)$ は互いに逆写像である.

証明. 最初に $R \circ L = id$ を示そう. $G \in \text{SG}(A \times B)$ を任意にとる. すると

$$L(G) = (G\langle 1_B \rangle, G(\exists), \langle 1_A \rangle G, (\exists)G, \theta_G)$$

である. このとき

$$H = \{(x, \theta_G(x)) \in G(\exists)/G\langle 1_B \rangle \times (\exists)G/\langle 1_A \rangle G \mid x \in G(\exists)/G\langle 1_B \rangle\}$$

とし $p = G(\exists) \times (\exists)G \rightarrow G(\exists)/G\langle 1_B \rangle \times (\exists)G/\langle 1_A \rangle G$ を自然な全射とする. このとき $R(L(G)) = p^{-1}(H)$ である. 今から $G = p^{-1}(H)$ を示そう. まず $(a, b) \in G$ とすると θ_G の定義から $([a], [b]) \in G(\exists)/G\langle 1_B \rangle \times (\exists)G/\langle 1_A \rangle G$ である. よって $(a, b) \in p^{-1}(H)$ である. 逆に $(a, b) \in p^{-1}(H)$ とすると $([a], [b]) = ([a], \theta_G([a])) \in G(\exists)/G\langle 1_B \rangle \times (\exists)G/\langle 1_A \rangle G$ である. よって $(a, c) \in G$ となる c を用いて $\theta_G([a]) = [c]$ である. このとき $[c] = [b]$ であるから $s \in A$ で $(s, b) \in G$ となるものをとると $(a, c) \cdot (s, b)^{-1} = (as^{-1}, cb^{-1}) \in \langle 1_A \rangle G$ である. つまり $a = s$ となる. よって $(a, b) \in G$ である. 以上から $R \circ L = id$ がわかった.

次に $L \circ R = id$ を示そう. $q = (U, V, T, Y, \theta) \in Q(A, B)$ を任意にとる. 今から $L \circ R(q) = q$ を示す. まず $\tilde{G}_\theta = \{(x, \theta(x)) \in V/U \times Y/T \mid x \in V/U\}$ としそして, $p: V \times Y \rightarrow V/U \times Y/T$ を自然な全射として $R(q) = p^{-1}(\tilde{G}_\theta)$ で定義されている. ここで $Z = p^{-1}(\tilde{G}_\theta)$ とおこう. すると $L(Z) = (Z\langle 1_B \rangle, Z(\exists), \langle 1_A \rangle Z, (\exists)Z, \theta_Z)$ である. ここで $Z\langle 1_B \rangle = p^{-1}(\{x \in V/U \mid \theta(x) = [1_B]\})$ であるが θ が同型であることから $\{x \in V/U \mid \theta(x) = [1_B]\} = \{[U]\}$ であり p の定義を鑑みると $Z\langle 1_B \rangle = U$ である. さらに $a \in Z(\exists)$ を任意にとると $(a, b) \in Z \subset V \times Y$ となる b が存在する. 特に $a \in V$ である. 逆に $a \in V$ とすると $[b] = \theta([a])$ となる $b \in Y$ をとれば $(a, b) \in p^{-1}(\tilde{G}_\theta)$ なので $a \in Z(\exists)$ である. つまり $Z(\exists) = V$ である. 同様にして $\langle 1_A \rangle Z = T$ かつ $(\exists)Z = Y$ である. $\theta([a]) = \theta_Z([a])$ を示そう. $[a] \in Z(\exists)/Z\langle 1_B \rangle$ に対して $(a, b) \in Z$ となる b を用いて $\theta_Z([a]) = [b]$ と定義するのであった. さて $(a, b) \in Z$ となる b とは定義からして $\theta([a]) = [b]$ となる $[b]$ なので $\theta([a]) = \theta_G([a])$ がわかる. 以上から $L \circ R(q) = q$ が示された. $\square$

2 作用域を持つ群

定義 7. G を群とする. Ω を集合とする. G と写像 $l: \Omega \rightarrow \text{End}(G)$ の組を作用域 Ω を持つ群 G と呼ぶ. 写像 l はほぼ省略される. $\omega \in \Omega$ による作用を g^ω と書くことにする.

定義 8. G, G' を作用域 Ω を持つ群とする. 準同型 $f: G \rightarrow G'$ が Ω -準同型であるとは,

$$\forall g \in G \forall \omega \in \Omega f(g^\omega) = f(g)^\omega$$

が成り立つときにいう.

定義 9. 部分集合 $H \subset G$ が G の Ω -部分群であるとは, $\forall g \in H \forall \omega \in \Omega g^\omega \in H$ となる時にいう.

Ω -正規部分群は, Ω -部分群でかつ正規部分群なものをいう.

$\text{SG}_\Omega(G)$ で G の Ω -部分群全体を表す.

定義 10. $\text{Q}_\Omega(A, B)$ は, $\text{Q}(A, B)$ の定義の中の, 部分群, 正規部分群, 同型をそれぞれ Ω -部分群, Ω -正規部分群, Ω -同型に置き換えたものとする. この時二つの Ω -群 A, B について

写像 $L: \text{SG}(A \times B) \rightarrow \text{Q}_\Omega(A, B)$ と $R: \text{Q}_\Omega(A, B) \rightarrow \text{SG}_\Omega(A \times B)$ は前節と同様に定義する. このとき以下の定理が同様の証明で成り立つ.

定理 11 (Ω -Goursat's lemma). A と B を Ω を作用域とする二つの群とする. このとき写像 $L: \text{SG}_\Omega(A \times B) \rightarrow \text{Q}_\Omega(A, B)$ と $R: \text{Q}_\Omega(A, B) \rightarrow \text{SG}_\Omega(A \times B)$ は互いに逆写像である.

証明. 定理 6 と全く同様に証明できる. □

3 同型定理

Goursat の補題を用いて色々な同型定理を導いていく. 以下では全て Ω を作用域にしているとする.

定理 12. G, H を群とする. $f: G \rightarrow H$ を群準同型とする. このとき

$$G/\ker(f) \cong \text{im}(f)$$

証明. $I \in \text{SG}_\Omega(G \times H)$ を

$$I = \{(x, f(x)) \mid x \in G\}$$

と定義する. f が準同型であることからちゃんと $I \in \text{SG}_\Omega(G \times H)$ になることがわかる. あとは Goursat の補題からわかる. $I(\exists) = G, I(1_H) = \ker(f)$ となるのがポイントである. □

命題 13 (第二同型定理). G を群とし $H \in \text{NSG}_\Omega(G), S \in \text{SG}_\Omega(G)$ とする. このとき HS は群であり, 同型

$$HS/H \cong S/H \cap S$$

が成り立つ.

証明. $I \subset G \times G$ を

$$I = \{(hs, s) \mid h \in H, s \in S\}$$

とする. $(hs, s), (vt, t) \in I$ について積を考えると $(hs, s) \cdot (vt, t) = (hsvt, st)$ となるが, H は G の正規部分群なので $svs^{-1} = u$ となる $u \in H$ が存在する. つまり $sv = us$ なので $(hsvt, st) = (hust, st)$ で $hu \in H$ なので $(hs, s) \cdot (vt, t) \in I$ がわかり I が $G \times G$ の部分群であることがわかる. 定義から $I(\exists) = HS$, $I\langle 1 \rangle = H$ がわかる. また $(\exists)I = S$ で $\langle 1 \rangle I = H \cap S$ なので同型が Goursat の補題からわかる. $\square$

命題 14 (第三同型定理). G を群とする. $A, B \in \text{NSG}_\Omega(G)$ で, $A \in \text{SG}_\Omega(B)$ とする. このとき同型

$$(G/A)/(B/A) \cong G/B$$

が成り立つ.

証明. $I \subset G/A \times G$ を

$$I = \{([bg]_A, g) \mid g \in G, b \in B\}$$

と定義する. I が群なのは A と B がともに G の正規部分群であることが効いてわかる. B が G の部分群であることから $I(\exists) = G/A$ がわかる. また $I\langle 1 \rangle = B/A$ もわかる. そして $(\exists)I = G$ であり $\langle [1]_A \rangle I = B$ なので同型はあとは Goursat の定理から従う. $\square$

定理 15 (胡蝶の定理: Zassenhaus' lemma). G と H を群 F の部分群とする. $A \in \text{NSG}_\Omega(G)$, $B \in \text{NSG}_\Omega(H)$ とする. このとき

$$A(G \cap B) \trianglelefteq A(G \cap H)$$

$$B(A \cap H) \trianglelefteq B(G \cap H)$$

であり, 同型

$$\frac{A(G \cap H)}{A(G \cap B)} \cong \frac{B(G \cap H)}{B(A \cap H)}$$

が成り立つ.

証明. $I \subset F \times F$

$$I = \{(ax, bx) \mid a \in A, b \in B, x \in G \cap H\}$$

とする. A と B が正規部分群であることと $G \cap H$ が G と H の両方に含まれていることから I が $F \times F$ の群であることがわかる. $I(\exists) = A(G \cap H)$ である. $I\langle 1 \rangle = A(G \cap B)$ である. 同様に $(\exists)I = B(G \cap H)$ かつ $\langle 1 \rangle I = B(A \cap H)$ である. あとは Goursat の補題からわかる. $\square$

注意. Goursat の定理の良いところは, 直積の部分群を与えたらその射影やスライスを計算するだけで同型定理が得られるということである.

4 組成列とか

胡蝶の定理から群の部分群の列に関する基本的な定理を証明することができる.

定義 16 (Ω -正規列 (Ω -subnormal series)). 群 G について部分群の有限列

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$$

で尚且つ $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ を満たすものを Ω -正規列と呼ぶ.

定義 17. 群 G について Ω -正規列

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$$

の細分とは Ω -正規列

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_u = G$$

であって、狭義の単調増加列 $r: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, u\}$ が存在して $H_{r(i)} = G_i$ となる時にいう。

定義 18. G の二つの正規列を考える。

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_m = G$$

$$\{1\} = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_u = G$$

この時これらが同値であるとは $m = u$ であり、全単射 $r: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ が存在して

$$G_{i+1}/G_i \cong H_{r(i)+1}/H_{r(i)}$$

が成り立つときに言う。

定理 19 (Schreier の定理). Ω -群 G が正規列を持つとする。このとき二つの Ω -正規列のそれぞれの細分であって同値なものを持つ。

証明. G の二つの Ω -正規列を考える。

$$(1) \quad \{1\} = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_m = G$$

$$(2) \quad \{1\} = B_0 \leq B_1 \leq \cdots \leq B_n = G$$

まず A_{i+1} を B の列を使って細分する。 B の列があるので、それに A_i との交わりをとる。

$$\{1\} = B_0 \cap A_{i+1} \leq \cdots \leq B_j \cap A_{i+1} \leq \cdots \leq B_n \cap A_{i+1} = A_{i+1}$$

ここにさらに A_i を掛ける。すると

$$A_i = A_i(B_0 \cap A_{i+1}) \leq \cdots \leq A_i(B_j \cap A_{i+1}) \leq \cdots \leq A_i(B_n \cap A_{i+1}) = A_{i+1}$$

となる。ここで $U_{i,j} = A_i(B_j \cap A_{i+1})$ とすると胡蝶の定理の前半から以下の列は Ω -正規列となる。

$$\{1\} = U_{0,0} \leq U_{0,1} \leq \cdots \leq U_{0,n} \leq \cdots \leq U_{i,j} \leq \cdots \leq U_{n,m} = G$$

同様に A と B を入れ替えて $V_{j,i} = B_j(A_i \cap B_{j+1})$ とすれば以下の正規列を得る。

$$\{1\} = V_{0,0} \leq V_{0,1} \leq \cdots \leq V_{0,m} \leq \cdots \leq V_{j,i} \leq \cdots \leq V_{m,n} = G$$

これら二つの列に関して剰余群を考えよう。胡蝶の定理から以下の同型を得る。

$$U_{i,j+1}/U_{i,j} = \frac{A_i(B_{j+1} \cap A_{i+1})}{A_i(B_j \cap A_{i+1})} \cong \frac{B_j(A_{i+1} \cap B_{j+1})}{B_j(A_i \cap B_{j+1})} = V_{j,i+1}/V_{j,i}$$

これから後半の話が出てくる。 □

定義 20 (Ω -組成列 (Ω -composition series)). Ω -正規列であって因子群 G_{i+1}/G_i が単純群であるものを組成列と呼ぶ.

定理 21 (Jordan-Hölder の定理). Ω -群 G には組成列が存在すると仮定する. このとき二つの組成列は同値である. (細分を取らずに同値というのがポイントである.)

証明. シュライアーの定理 (定理 19) から二つの組成列は長さが等しい細分を持つ. ところで G_{i+1}/G_i が単純群なので細分と元の組成列は一致する. よって元々の二つの組成列の長さは等しい. またシュライアーの定理 (定理 19) から因子群は並べ替えをすれば一致する. $\square$

クルルシュミットなどもこの文脈でいけるだろうかと試してみたが, なんか無理そうだったのでやめた.

論文 [2] にはこの文章で紹介したような, 準同型から直積の部分群を作るのと直積の部分群から準同型を作る操作が逆操作になっているというを紹介しているのでこれを参考にしたかもしれない. 論文 [3] では一般的な代数構造の上で Goursat's lemma を考察しているようだ. Lambek は一般的な代数構造と Goursat's lemma の話をよくしているようなので調べてみると面白いかもしれない.

参考文献

- [1] 佐々木 隆二, 代数学の基礎, <https://www2.math.cst.nihon-u.ac.jp/sasaki/wp/wp-content/uploads/2014/12/fa75a316529d0ac746d8f50958ba66ed.pdf>
- [2] D. D. Anderson and V. Camillo, *Subgroups of direct products of groups, ideals and subrings of direct products of rings, and Goursat's lemma*, Contemp. Math. 480, 1–12, 2009, doi: 10.1090/conm/480/09364
- [3] J. Lambek, *Goursat's theorem and the Zassenhaus lemma*, Can. J. Math. 10, 45–56 (1958), doi: 10.4153/CJM-1958-005-6