

クラークソンの不等式 (未完成)

電波通信 ナンブ キトラ

2024 年 12 月 1 日

この文書は、 L^p 空間の一様凸性の証明に用いられるクラークソンの不等式を、三線定理を用いて証明することを目的とする。

1 三線定理とか

この章の話 [6] を大いに参考にした。この章で領域といったら $\mathbb{C}$ の連結な開集合のことを指すことにする。まずは基本的な複素関数論をする。正則関数といったら複素関数論の正則関数とする。

命題 1. 領域 D 上で定義された正則関数 f について、 $|f|$ が D 上で最大値をとるならば、 f は定数関数である。

証明. $|f|$ は点 $a \in D$ で最大値を達成するとする。この時十分小さい $r > 0$ を取り、 $B(a, r) \subset D$ とする。この時 $B(a, r)$ 上で f のテイラー展開は収束するので、 $B(a, r)$ 上で以下のような等式が成り立つ。

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - a)^i.$$

これを用いると、 z を (a を中心とする) 極座標で書いたときに

$$|f(a + re^{i\theta})|^2 = \sum_{n,m} c_n \bar{c}_m e^{i(n-m)\theta} r^{n+m}$$

が成り立つ。よって

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_i |c_i|^2 r^{2i}$$

である。ここで

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2$$

なので

$$\sum_i |c_i|^2 r^{2i} \leq |c_0|^2$$

である。よって $i \geq 1$ ならば $c_i = 0$ である。故に f は局所定数であることがわかり、正則関数の剛性から f が定数であることがわかる。□

上記の最大値原理から以下の系を得る。

系 2. D を $\mathbb{C}$ 内の領域とし, f は $\text{CL}(D)$ 上の定数でない連続関数で, D 上で正則であるとする. このとき f が $\text{CL}(D)$ 上で最大値をとるならば, ∂D 上で最大値をとる.

次の定理がこの章の目的である三線定理と呼ばれるものである.

定理 3 (三線定理). a, b を実数とする. そして $S = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \text{Re } z \leq b\}$ とする. さらに f を S 上の有界な連続関数で, $\text{Int}(S)$ 上で正則な関数とする. また, $a \leq c \leq b$ となる c について

$$M(c) = \sup_y |f(c + iy)| < \infty$$

とする. このとき

$$M((1-t)a + tb) \leq M(a)^{1-t} M(b)^t$$

が成り立つ.

証明. 適当にアフィン変換することにより, $a = 0, b = 1$ としても良い.

まず最初に $M(0)$ と $M(1)$ が共に正の時に定理を示す. このとき

$$f(z)M(0)^{-(1-z)}M(1)^{-z}$$

を考えることによって, $M(0) = M(1) = 1$ としても良い (正の実数 R に対して $|R^z| = R^{\text{Re}(z)}$ なので).

ここで

$$f_n(z) = f(z) \exp(z(z-1)/n)$$

とする. このとき $z(z-1) = x(x-1) - y^2 + i(2xy-1)$ なので

$$|\exp(z(z-1)/n)| \leq \exp(x(x-1)) \exp(-y^2) \leq \exp(-y^2)$$

である. よって f_n は $\text{Re } z = 0, 1$ を満たす z について $|f_n(z)| \leq 1$ を満たす. さらに

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|\text{Im } z| = R} |f_n(z)| = 0$$

が成り立つ. よって, $|f_n(z)|$ は S 上で最大値を持つ. 最大値原理より, それは境界上で最大値をとるので, 任意の $z \in S$ について $|f_n(z)| \leq 1$ である. ここで, 点 z を固定するごとに $f_n(z) \rightarrow f(z)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つので, 任意の $z \in S$ について $|f(z)| \leq 1$ である. これが求める不等式である.

次に $M(0) \times M(1) = 0$ の時を考察しよう. 数 $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると (具体的には, $M(1), M(0)$ がともにゼロでない時には $\varepsilon < \max\{M(0), M(1)\}$ と取れば良い. 両方ともゼロなら特に制限はない.), $f + \varepsilon$ について $M(0)$ と $M(1)$ が正になる. そして $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば求める不等式が出てくる. $\square$

測度空間 (X, μ) について, $L^0(X, \mu)$ で (X, μ) 上の可測関数を表す.

定理 4 (Riesz–Thorin の定理). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ を測度空間とする. そして $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, \infty]$ で $\theta \in [0, 1]$ とする. この時

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

と

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

が成り立つとする。このとき線形写像

$$T: L^0(X, \mu) \rightarrow L^0(Y, \nu)$$

と $(X, \mathcal{A}, \mu)$ の単関数 f と $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ の単関数 g について,

$$\left| \int_Y g T f \, d\nu \right| \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^{\theta} \|f\|_p \|g\|_r$$

が成り立つ。ここで r は q の共役指数である。

証明. まず $\|f\|_p = \|g\|_r = 1$ としても一般性を失わない。そして

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}(x)$$

とおく。ここで、各 j について $a_j \in \mathbb{C}$ で族 $\{A_j\}$ は互いに交わらない可測集合とする。同様に

$$g(y) = \sum_{l=1}^m b_l \chi_{B_l}(y)$$

とおく。ここで、各 l について $b_l \in \mathbb{C}$ で、族 $\{B_l\}$ は互いに交わらない可測集合とする。この状況において

$$\|f\|_p^p = \sum_{j=1}^n |a_j|^p \mu(A_j) = 1$$

と

$$\|g\|_r^r = \sum_{l=1}^m |b_l|^r \nu(B_l) = 1$$

に注意せよ。ここで関数 p を

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

と定義する。さらに r_0, r_1 を q_0, q_1 の共役指数として関数 r を

$$\frac{1}{r(z)} = \frac{1-z}{r_0} + \frac{z}{r_1}$$

と定義する。そして f_z と g_z を以下のように定義する。

$$f_z(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

$$g_z(y) = |g(y)|^{\frac{r}{r(z)}} \frac{g(y)}{|g(y)|}.$$

すると,

$$f_z(x) = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{a_j}{|a_j|} \chi_{A_j}(x)$$

及び

$$g_z(y) = \sum_{l=1}^m |b_l|^{\frac{r}{r(z)}} \frac{b_l}{|b_l|} \chi_{B_l}(y)$$

と表すことができる。そして

$$I(z) = \int_Y g_z T f_z \, d\nu$$

と定義する。すると

$$I(z) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m |a_j|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{a_j}{|a_j|} |b_l|^{\frac{r}{r(z)}} \frac{b_l}{|b_l|}$$

が成り立つ。もちろんこれは $\{z \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ 上で有界かつ連続で、その内部で正則関数である。 $c \in [0, 1]$ に対して

$$M(c) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |I(c + iy)|$$

と定義すれば、三線定理から

$$M(c) \leq M(0)^{1-c} M(1)^c$$

である。 $M(0)$ と $M(1)$ の評価をしていこう。任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|I(iy)| = \left| \int_Y g_{iy} T f_{iy} \, d\nu \right| \leq \|T f_{iy}\|_{q_0} \|g\|_{r_0} \leq \|T\|_{p_0, q_0} \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{r_0}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \|f_{iy}\|_{p_0}^{p_0} &= \sum_{j=1}^n \left| |a_j|^{\frac{p}{p(iy)}} \right|^{p_0} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{p}{p(iy)} p_0} \mu(A_j) = 1 \\ \|g_{iy}\|_{r_0}^{r_0} &= \sum_{l=1}^m \left| |b_l|^{\frac{r}{r(iy)}} \right|^{r_0} \nu(B_l) = \sum_{l=1}^m |b_l|^{\frac{r}{r(iy)} r_0} \nu(B_l) = 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$M(0) \leq \|T\|_{p_0, q_0}$$

を得る。同様にして、

$$M(1) \leq \|T\|_{p_1, q_1}$$

を得る。よって

$$\left| \int_Y g T f \, d\nu \right| \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^{\theta}$$

を得る。 $p_0 = q_0 = \infty$ などの場合は、 $f_z = f$ と定義すれば良い。 □

この系として以下の定理がある。

定理 5 (Riesz–Thorin). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ を測度空間とする。そして $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, \infty]$ で $\theta \in [0, 1]$ とする。この時

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \end{aligned}$$

とする。このとき線形写像

$$T : L^0(X, \mu) \rightarrow L^0(Y, \nu)$$

について

$$\|T\|_{p, q} \leq \|T\|_{p_0, q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1, q_1}^{\theta}$$

が成り立つ。

2 クラークソンの不等式と一様凸性

定理 6 (Clarkson's inequality). $p \in (1, 2]$ で $1/p + 1/q = 1$ とする。このとき任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対して

$$(|x + y|^q + |x - y|^q)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ。

2 次正方行列 A を

証明.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義する。すると

$$\|A(x, y)\|_2^2 = |x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) = 2\|(x, y)\|_2^2$$

なので

$$\|A\|_{2,2} = 2^{1/2}$$

であり、また

$$\|A(x, y)\|_\infty \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$$

であり、

$$\|A(1, 0)\|_\infty = \|(1, 0)\|$$

なので

$$\|A\|_{\infty,1} = 1$$

である。ここで、 $p \in (1, 2]$ より、

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$$

となる θ が存在する。よって

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}$$

である。よって、

$$\|A\|_{q,p} \leq (2^{1/2})^{1-\theta} 1^\theta = 2^{(1-\theta)/2} = 2^{1/q}$$

となる。これは求める不等式と同値である。 □

3 以下未完成

命題 7. a, b を非負の実数とする。このとき $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{2-p}{p}} (a^q + b^q)^{\frac{1}{q}}$

が成り立つ。

証明. ヘルダーの不等式から従う。 □

命題 8 (逆ミンコフスキーの不等式). $k \in (0, 1)$ とする。このとき $f, g \in L^k(X)$ に対して

$$\left(\int_X |f + g|^k d\mu \right)^{\frac{1}{k}} > \left(\int_X |f|^k d\mu \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\int_X |g|^k d\mu \right)^{\frac{1}{k}}$$

が成り立つ。

定理 9 (Clarkson's inequality). $p \in (1, 2]$ で $1/p + 1/q = 1$ とする。このとき $f, g \in L^p$ に対して

$$(\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ。

証明. $\frac{p}{q} < 1$ に注意しよう。

$$\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q = \left(\int_X (|f + g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_X (|f - g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}}$$

よって

$$\left(\int_X (|f + g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_X (|f - g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\int_X (|f + g|^q + |f - g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}}$$

である。ここで、

$$(|f + g|^q + |f - g|^q)^{\frac{p}{q}} \leq 2^{\frac{p}{q}} (|f|^p + |g|^p)$$

なので

$$\left(\int_X (|f + g|^q + |f - g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \leq 2^{\frac{p}{q}} \int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu = 2^{\frac{p}{q}} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

よって最初に挙げた不等式は成り立つ。 □

定理 10. $2 \leq p$ で $1/p + 1/q = 1$ とする。このとき $f, g \in L^p$ に対して

$$(\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|f\|_p^q + \|g\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ。

証明. $\frac{q}{p} < 1$ に注意しよう。

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p = \int_X |f + g|^p d\mu + \int_X |f - g|^p d\mu = \int_X (|f + g|^p + |f - g|^p) d\mu$$

ここで

$$|f + g|^p + |f - g|^p \leq 2(|f|^q + |g|^q)^{\frac{p}{q}}$$

なので

$$\int_X (|f + g|^p + |f - g|^p) d\mu \leq 2 \int_X (|f|^q + |g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu$$

ミンコフスキーに不等式から

$$\left(\int_X (|f|^q + |g|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{q}{p}} = \|f\|_p^q + \|g\|_p^q$$

よって

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq 2(\|f\|_p^q + \|g\|_p^q)^{\frac{p}{q}}$$

を得る。これは先に挙げた不等式に等しい。

□

系 11. L_p は一様凸である。

4 追記

1936 年にクラークソン [2] はクラークソンの不等式を用いて L^p 空間や ℓ^p の一様凸性を証明した。

1940 年に Boas [1] は“線形写像のリースの凸性定理”を用いてクラークソンの定理を証明しているが、多分これは今ふうにいるとリースソリンのことだと思う。

1956 年に Henner [3] はクラークソンの不等式の拡張を、なんか頑張って不等式評価して証明している。

1959 年に Morawetz [4] は L^p 空間の一様凸性の証明に使うことのできる新しい不等式を証明している。

1976 年に Ramaswamy [5] は実数に関するクラークソンの不等式を用いるのではなく、ラーデマッヒャー関数を用いて積分のクラークソンの不等式を直接証明している。

参考文献

- [1] R. P. Boas, Jr., *Some uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 304–311, DOI:10.1090/S0002-9904-1940-07207-6. MR 1456
- [2] James A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), no. 3, 396–414, DOI:10.2307/1989630. MR 1501880
- [3] Olof Hanner, *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p* , Ark. Mat. **3** (1956), 239–244, DOI:10.1007/BF02589410. MR 77087
- [4] Cathleen S. Morawetz, *Two L^p inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1299–1302, DOI:10.1090/S0002-9904-1969-12403-1. MR 256149
- [5] S. Ramaswamy, *A simple proof of Clarkson's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 2, 249–250, DOI:10.2307/2041783. MR 492135
- [6] 宮島静雄, **関数解析**, 横浜図書, 2005.