

$\mathbb{R}^n$ 内の星型領域は、

$\mathbb{R}^n$ に微分同相

一色 三良

(Isiki SanRah)

@ConCious??

この文書では、星型領域

が、 $\mathbb{R}^n$ に diffeo であること

を証明する。

この定理は Bock-Tu による

Good cover の存在証明に

使用されるはずである。

Def 1 (下半連続関数)

$$f: (X, d) \rightarrow [-\infty, +\infty)$$

が下半連続関数であるとは、

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x) \quad f(y) > f(x) - \varepsilon$$

が成立している。

これは、 $\forall a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f^{-1}((a, \infty)) \text{ が open であること、}$$

も示す。

$$f^{-1}([-\infty, a]) \text{ が closed}$$

であることを示す。

Prop 2. $S > 0$ is a real number,

$f: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ is lower semicontinuous, i.e.,

$\forall x \in X, f(x) \geq S > 0$ can

be established (2.3.2). 2.3.2, 2.3.2, 2.3.2,

continuous function sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

can exist (2.3.2).

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \geq S$$

$$(2). \quad f_n \leq f_{n+1},$$

$$(3) \quad f_n \rightarrow f \text{ (pointwise)}$$

is not true.

証明,

$$f_n(x) = \inf_{p \in X} \{f(p) + n d(p, x)\}$$

とすると, これが $p \mapsto p$ の
条件を満たす。以下これを
見ることにする。

step 1, $p = x$ とすれば
 $f_n(x) \leq f(x)$ がわかる。

step 2, $\forall p \in X$ について,

$$f(p) + n d(p, x) \leq f(p) + (n+1) d(p, x)$$

$$\text{よって} \quad f_n \leq f_{n+1}$$

がわかる。

Step 3 $d(p, x) \geq 0 \neq \eta$.

$$S \leq f(p) \leq f(p) + n d(p, x).$$

とわかるので、 $f_n(x) \geq S$

がわかる。

Step 4 (f_n の連続性を示す)

$x, y \in X$ と任意に与えらる。

とある、 $\varepsilon > 0$ と任意に与えらる、 $f_n(x)$ の

def がい、 $q \in X$ が存在して

$$f(q) + n d(q, x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

とあり、 $f_n(y)$ の def がい、

$$f_n(y) \leq f(q) + n d(q, y)$$

とわかる。

これらの式を辺々引き、

三角不等式から

$$\begin{aligned} f_n(y) - f_n(x) &< n(d(x, y) - d(x, x)) - \varepsilon \\ &\leq n d(x, y) - \varepsilon. \end{aligned}$$

を得る。 ε は任意であるので、

$$f_n(y) - f_n(x) \leq n d(x, y)$$

を得る。 逆に x, y の
対称性から

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq n \cdot d(x, y)$$

となるので f_n は連続である。

(より強く、リプシッツ写像である)
(このことはよく知られている...)

Steps ($f_n \xrightarrow{\text{a.s.}} f$ $\varepsilon + \delta \geq \varepsilon$)

$x \in X$ を任意に与え、 ε, δ_0 に対して、

f の下半連続性が $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_0 > 0$ 、

δ_0 が存在して、

$$d(x, y) < \delta \text{ ならば } f(y) > f(x) - \varepsilon$$

と成立する。

② $p \in X$ に対して、

① $d(p, x) < \delta$ ならば、上のことを用いて、

$$f(x) - \varepsilon < f(p) \leq f(p) + h \cdot d(p, x)$$

と成立する。

② $d(p, x) \geq \delta$ ならば、 $N \in \mathbb{N}$ を

十分大きくとる、

$$f(x) - \varepsilon \leq N \cdot \delta \quad \text{から } N \geq \frac{f(x) - \varepsilon}{\delta}$$

とすればよい。

$n \geq N$ ならば,

$$f(x) - \varepsilon \leq n d(p, x) \leq f(p) + n d(p, x). \\ (\because f > 0)$$

がわかる。

上の ① ② から, $N \in \mathbb{N}$ を十分大きく

とすれば, $n \geq N$ ならば, $\forall p \in X$

(2) となる。

$$f(x) - \varepsilon \leq f(p) + n \cdot d(p, x).$$

$$\text{よって, } n \geq N \Rightarrow f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \stackrel{\text{(Step 1)}}{\leq} f(x)$$

よって, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ がわかる



Prop. 3

$M: \text{Cpt, mfd, } f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont.}$

$\epsilon > 0, \exists \delta > 0, C^\infty\text{-map } \gamma \text{ s.t. } f \in$

— 様 ϵ 近い γ なる γ がある

$\epsilon \in \mathbb{R}$ 任意に
 $\delta \in \mathbb{R}$

証明) $\forall a \in M \exists \delta > 0$

$$U_a = \{x \in M \mid |f(x) - f(a)| < \epsilon\}$$

ϵ だけ $\delta > 0$ なる δ なる $a \in U_a$ なる

$$M = \bigcup_{a \in M} U_a \text{ なる } \delta > 0.$$

γ, γ M の Cptress なる

$$M = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \text{ なる } \delta > 0.$$

さ 2, 2 のとき, C^∞ は単位の分解

$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ が存在して,

$$\text{supp } \lambda_i \subset U_{a_i}$$

とできる。

$$\text{よって, } g(x) := \sum_{i=1}^n f(a_i) \cdot \lambda_i(x)$$

と def (よって, 2 のとき, $g: M \rightarrow \mathbb{R}$

は C^∞ である, $\forall x \in M$ について,

$$|f(x) - g(x)| = \left| \sum_{i=1}^n f(x) \lambda_i(x) - g(x) \right|$$

($\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1$ による)

$$= \left| \sum_{i=1}^n (f(x) - f(a_i)) \lambda_i(x) \right|$$

$$\leq \sum_{x \in U_i} |f(x) - f(a_i)| \lambda_i(x)$$

$$< \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1 \quad \text{より}$$

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

(ここで $\|\cdot\|_\infty$ は sup ノルム)



Prop. 4

$M: \text{cpt. mfd.}$

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$: 下半連続,

$f \geq s > 0$ とする。
($s \in \mathbb{R}$)

このとき、 $\mathbb{C}^\infty$ 関数列 $\{g_n\}_{n=N}^\infty$

(番号から N が初まりに注意) が存在

して、① $g_n \leq g_{n+1}$

② $g_n \rightarrow f$ (各点収束)

③ $g_n > \frac{s}{2}$

④ $g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2n(n+1)}$

を $\forall x \in X$ で満たす。

($\because$ $\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ に注意せよ)
($\& \mathbb{C}^\infty$ つかう。)

① ② ③ ④ を満たす。

证明)

Prop 1. 连续函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

满足 (2). $f_n \rightarrow f$, $f_n \geq s$

则 $f \geq s$.

(2). $F_n = f_n - \frac{1}{n}$ 也满足 (2).

于是 $N \in \mathbb{N}$ $N > \frac{4}{s}$ 也满足 (2).

于是 $n \geq N$ 时 $s \leq f_n$

$$F_n = f_n - \frac{1}{n} \geq s - \frac{1}{N} > s - \frac{s}{4} = \frac{3}{4}s.$$

于是 $F_n > \frac{3}{4}s$ 也满足 (2).

すなわち h .

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= (f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &\geq -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore F_{n+1} - F_n \geq \frac{1}{n(n+1)}$$

を得る。

212. $P \cap P$ より, $\exists g_n; \infty$

$$\|F_n - g_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}$$

とわかる。これを, 212 $\{g_n\}_{n=N}^\infty$ と定義しよう。

このとき, $g_n \rightarrow f$

はよくわかる。

残りの条件を

確かめよう。

$$\|F_n - g_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\|F_{n+1} - g_{n+1}\|_\infty < \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$$

より、

$$g_{n+1} - g_n > F_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - F_n - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= (F_{n+1} - F_n) - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\geq \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\geq \frac{1}{n(n+1)} - 2 \cdot \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\therefore g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\left(\because 2 \cdot \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{4n(n+1)} \text{ となるから} \right)$$

※2. 注意 12.

$$\begin{aligned} g_n &> F_n - \frac{1}{4n(n+1)} \\ &> \frac{3}{4}S - \frac{1}{n} > \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S \\ &= \frac{1}{2}S. \end{aligned}$$

$$\text{よ、2 } g_n > \frac{1}{2}S.$$

($n \geq N > \frac{4}{5}$ に注意せよ。)

(同様 $\frac{1}{4n(n+1)} \leq \frac{1}{n}$ を用いた。)

□

prop 1.5

$$E := \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} a < b, \quad c < d, \\ d - c > \frac{b - a}{2} \end{array} \right\}$$

と def する. E は $\mathbb{R}^4$ の 開 部分多様体

となる. このとき, $\mathcal{C}^\infty$ -写像
(5つの変数に拘らず $\mathcal{C}^\infty$ 写像.)

$$h: \mathbb{R} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, a, b, c, d) \mapsto h(r, a, b, c, d)$$

が存在 (2) 以下をみたす。

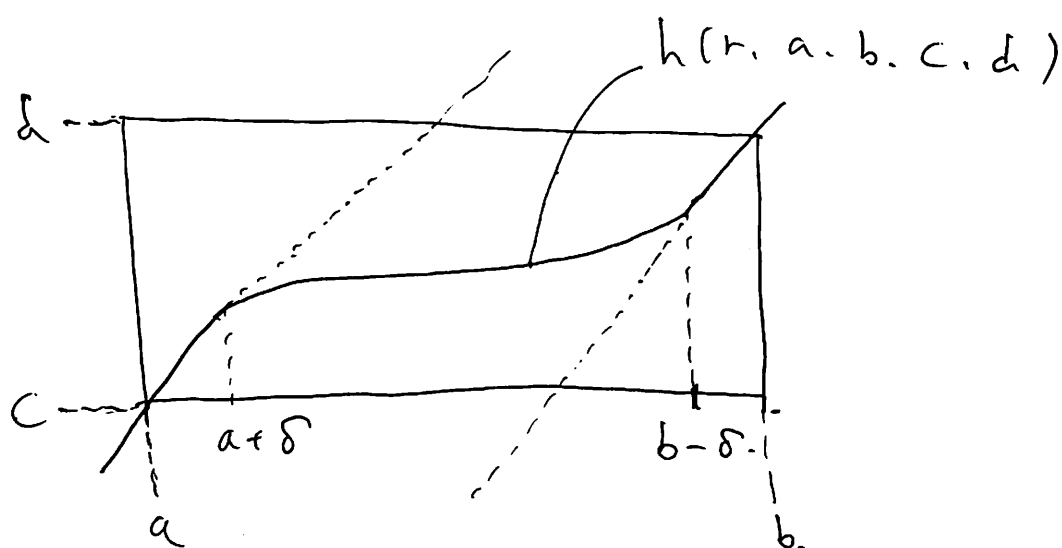
$$\textcircled{1} \quad \partial_r h > 0$$

$$\textcircled{2} \quad h([a, b], a, b, c, d) = [c, d].$$

$$\textcircled{3} \quad \delta = \frac{b-a}{4} \text{ とする.}$$

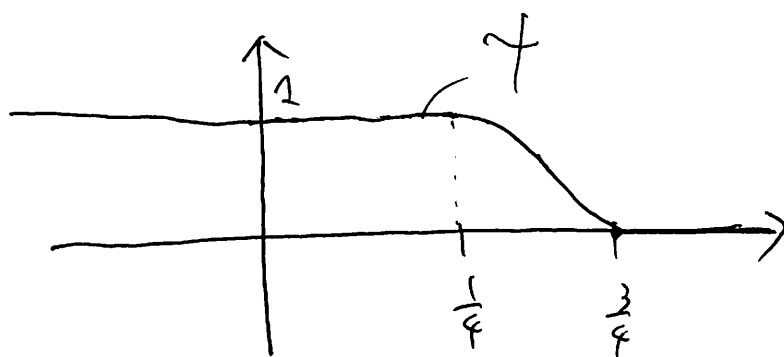
$$x < a + \delta \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r - a) + c$$

$$b - \delta < x \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r - b) + d.$$



(図) h の概形図.

1/2 証明) $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、次のように
 ∞ -区間上に作る.



つまり, $0 \leq \psi \leq 1$.

つまり, $x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \psi(x) = 1$.

$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow \psi'(x) < 0$

$\frac{3}{4} \leq x \Rightarrow \psi(x) = 0$.

このように ψ が存在するとは.

多様体の性質を知り、2 次元でよくわかる。

2のよう+2 ψ をもつ。2.

$$h(r, a, d, c, d) =$$

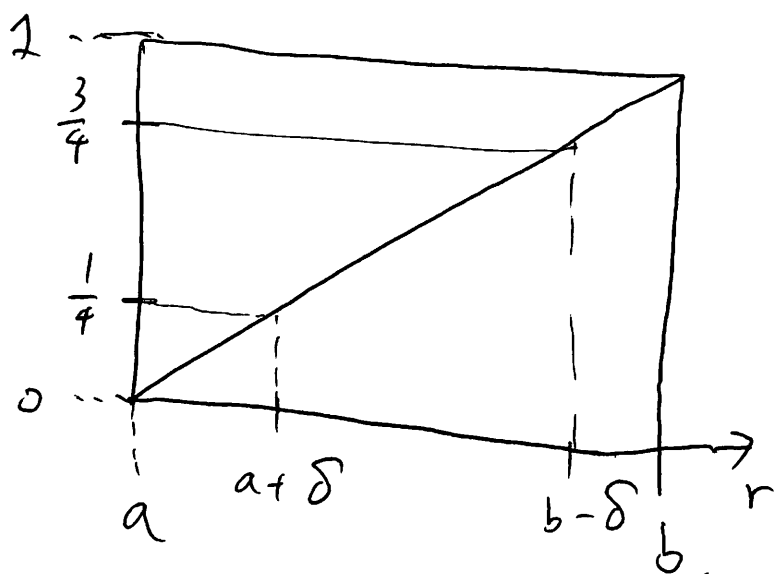
$$\left(\frac{1}{2}(r-a)+c\right) \cdot \psi\left(\frac{r-a}{b-a}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}(r-b)+d\right) \cdot \left(1 - \psi\left(\frac{r-a}{b-a}\right)\right)$$

とすると、 h は求める性質を

満たす。

系から読者のまかせ。



$$\delta = \frac{b-a}{4}$$

等々まで、

$\frac{r-a}{b-a}$ のグラフ。

$\mathbb{R}^n$ 内の 2 点、 $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\overline{ab} = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

と def する。

Def 6 (星型集合)。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が星型集合で

あるとは、

$$\exists c \in A, \forall x \in A, \overline{cx} \subset A$$

を満たすようにする。

上のような c を A の星の中心

と定義する。

Def 7 (星型領域)

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A は、
星型でありかつ開集合で
あるときに 星型領域
と呼ぶ。

以下、星型領域を
 $\mathbb{R}^n$ の開部分多様体
とみて、話を進める。

また、

以下では

$$B(x, r)$$

を x を中心とする r -開球、

$$F(x, r)$$

を、 x を中心とする r -閉球

を表わすことにする。

Thm. 8

$\mathbb{R}^n$ 内の星型領域は、

$\mathbb{R}^n$ に微分同相。

証明) C を星型領域とする。

平行移動を力さず C により、

C の星の中心は、原点 0 としてもよい。

また、動径 r が変化する diffeo

$\mathbb{R}^n \cong B(0, 1)$ の存在から、

C は、有界であるを仮定しても

一般性を失わない。

$\mathcal{C}$ は, open かつ 0 の十分小さな ε -近傍を含む。(しかし, 適当に $\mathbb{R}^n$ 全体をスカラー-倍する λ により, $\mathcal{C}$ は,

$$B(0, 2) \subset \mathcal{C}$$

と仮定 (これもよい。

($\mathcal{C}$ の有界性も崩れちゃう。)

さ2. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

と1. $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \sup \{ \lambda \geq 0 \mid \lambda \cdot x \in \mathcal{C} \}$$

と def する.

$\mathcal{C}$ のとき 次の $\mathcal{C}$ が 成立する。

$$\textcircled{1} \quad f \geq 1 \quad (7 \neq 7 \quad S = 1 \quad z, \dots, z, z)$$

$$(\because B(0, 2) \subset Z)$$

$\textcircled{2}$ f は、下半連続、

$\textcircled{2}$ を示す (2 分しよう)。

$x \in S^{n-1}$ と $\varepsilon > 0$ と任意にとる。

すると、 f の定義から、 $\exists \lambda > 0$ が存在して、

$$\lambda x \in Z \text{ かつ、} \lambda > f(x) - \varepsilon$$

とできる。 $\lambda x \in C$ かつ $\lambda x \in \bigcup_{x \in Z} B(x, \varepsilon)$ 。

C が open であるから $\exists \delta > 0$ 、

$$B(\lambda x, \delta) \subset C \text{ とできる。}$$

$$V = B(x, \frac{\delta}{\lambda}) \cap S^{n-1}$$

とすると、 V は S^{n-1} の open set

である。

$$y \in V, \text{ 任意 } \lambda$$

$$\|x - y\| < \frac{\delta}{\lambda}, \text{ 任意 } \lambda$$

$$\|\lambda x - \lambda y\| = \lambda \|x - y\| < \frac{\delta}{\lambda} \cdot \lambda = \delta.$$

$$\text{よって } B(\lambda x, \delta) \subset \bigcup \mathcal{O}_S,$$

$$\lambda \cdot y \in \bigcup$$

$$\therefore f(y) \geq \lambda.$$

$$\text{つまり, } y \in V \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon,$$

$$\text{よって } f \text{ は下半連続である.}$$

(f は、言わば、動径の函数
である)

この f に対して,

prop 4 の $\{g_n\}_{n=\mu}^{\infty}$ に対して,

$$g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$g_n > \frac{s}{2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right).$$

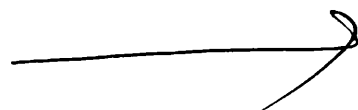
$$\left(\begin{array}{l} (s=1 \text{ に対して}) \\ \rightarrow \text{つまり} \end{array} \right.$$

$$g_{\mu} - 0 > \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{\mu} \right) - 0 \right)$$

以上を示す。

$\Phi: B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$

を定義する。



$$\Phi(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\|x\|} \cdot h\left(\|x\|, 0, 1 - \frac{1}{N}, 0, g_N\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ \quad \left(x \in F\left(x, 1 - \frac{1}{N}\right) \text{ のとき} \right) \\ \\ \frac{x}{\|x\|} \cdot h\left(\|x\|, 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}, g_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right), g_{n+1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ \quad \left(\begin{array}{l} x \in F\left(0, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \setminus B\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) \\ n \geq N \text{ のとき} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

2. 例. Φ が 全単射 であることはよくわかる。

Φ が diffeo であることを示そう。

$\det J\Phi \neq 0$ が示されたい。

木座標 Φ をつかえば、 $x \neq 0$ かつ、

$$(J\Phi)_x = \left(\begin{array}{c|cccc} \frac{x}{\|x\|} \partial_r h & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right)$$

と $\partial_r h \neq 0$ かつ $\partial_r h \neq 0$ である。

$\det (J\Phi)_x \neq 0$ が示される。

また、 0 の付近では、

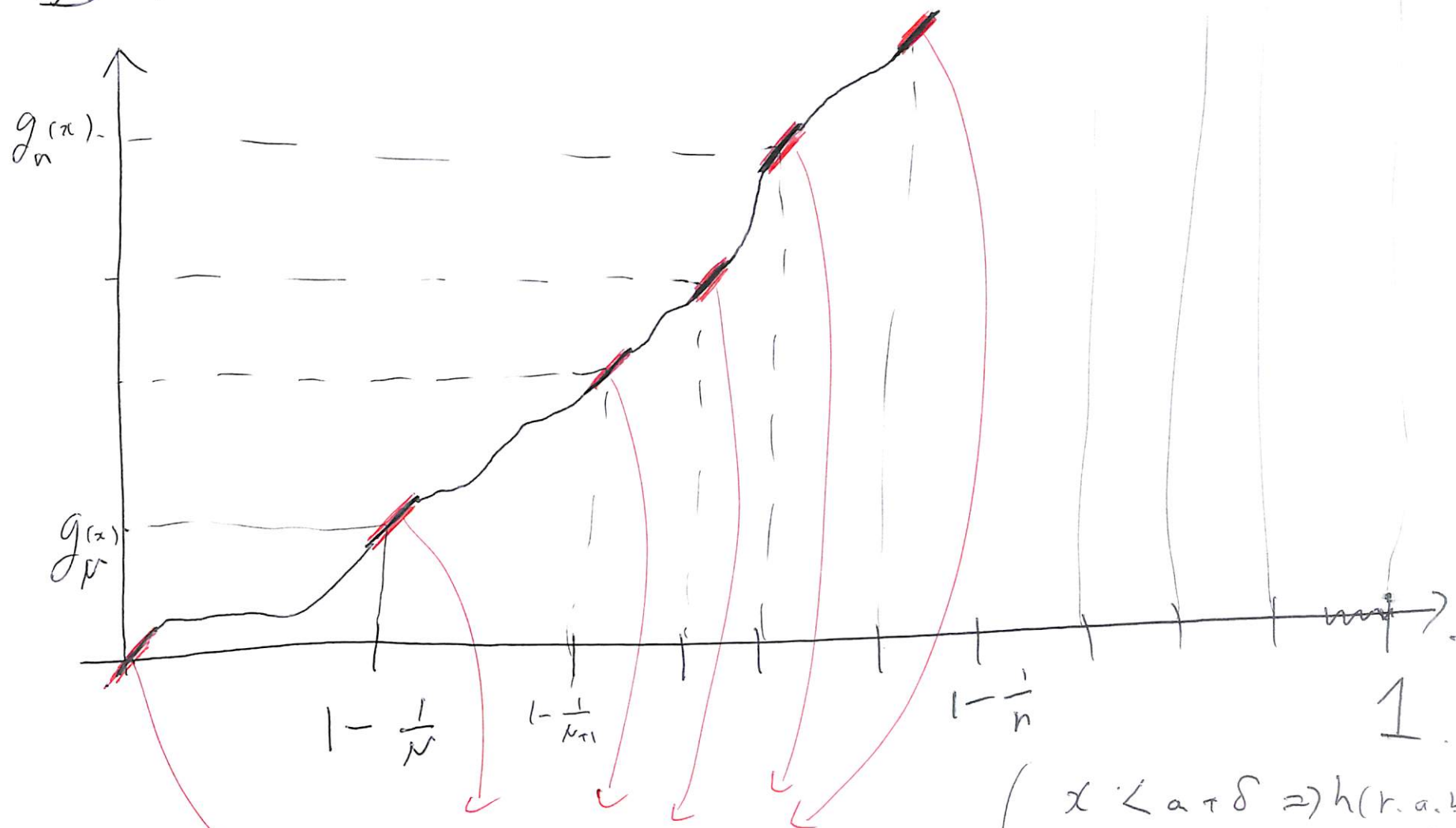
$$\Phi(x) = \frac{1}{2} x + o(x), \text{ 結局、}$$

Φ は diffeo である。

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ は diffeo

かつ 0 の付近、結局 $\subset \mathbb{R}^n$ は diffeo である $\square$

79



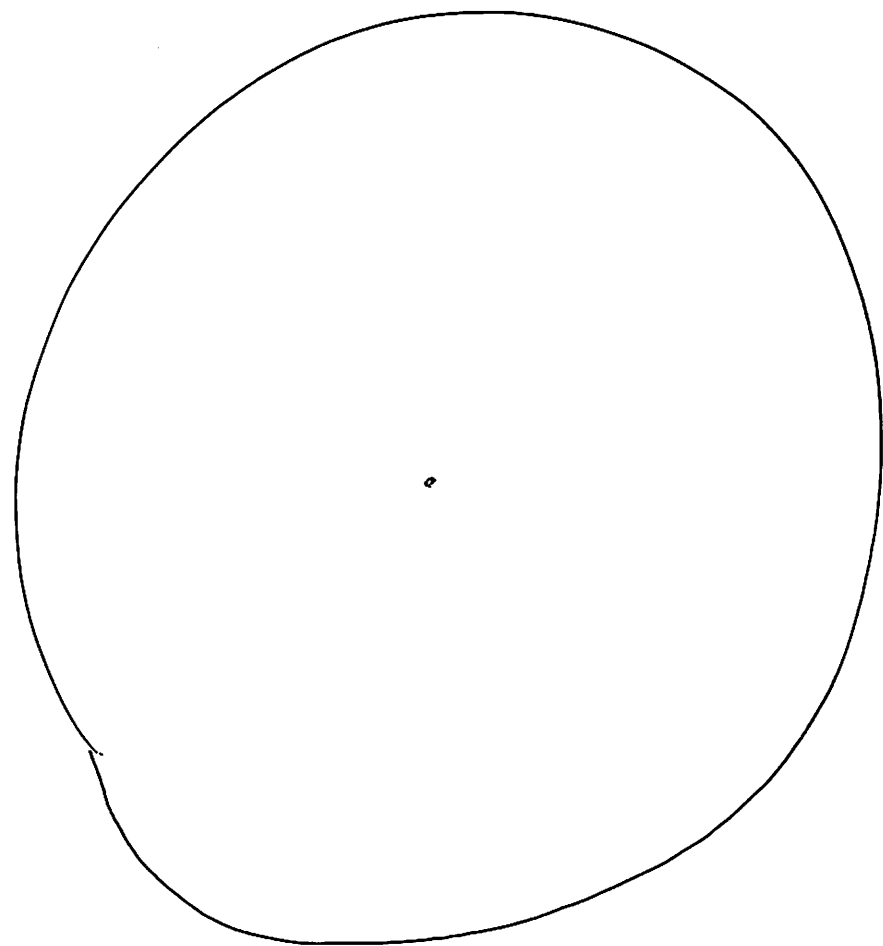
このとき、 h が $\frac{1}{2}(r-a)+c$ に見えり合おせされる。

$$x < a + \delta \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r-a) + c.$$

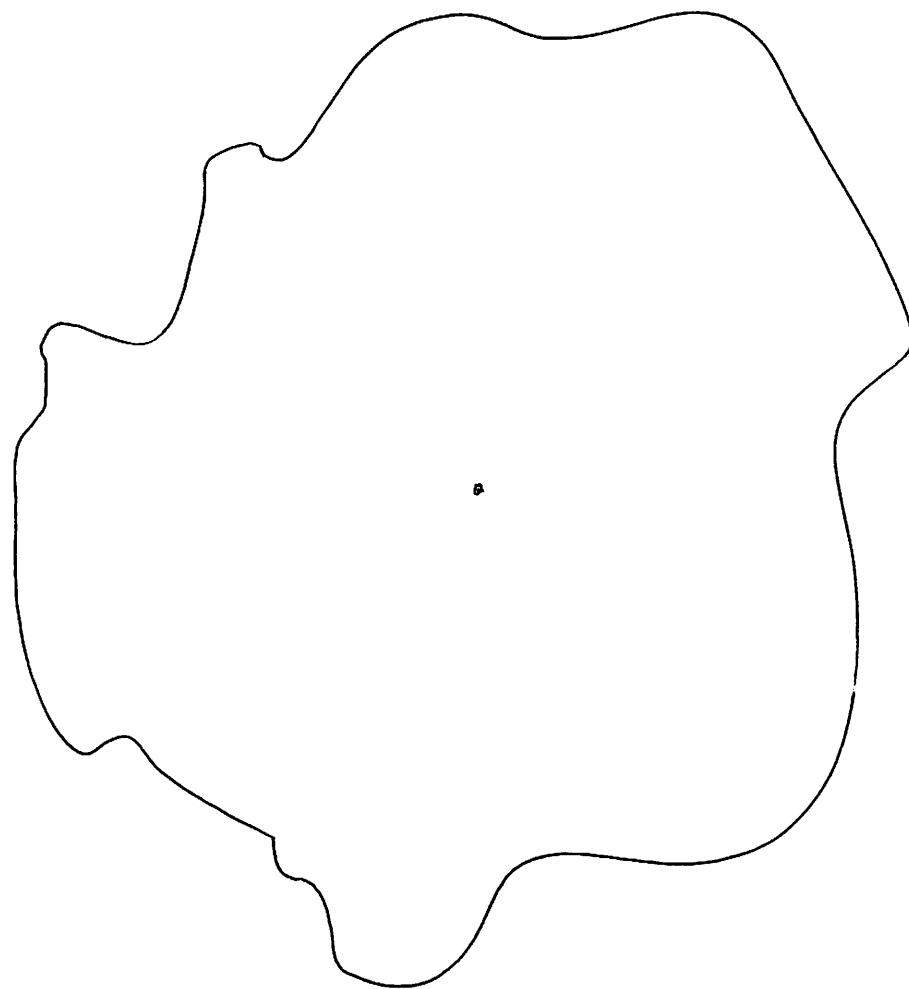
$$b - \delta < x \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r-b) + d$$

からわかる。

图 10

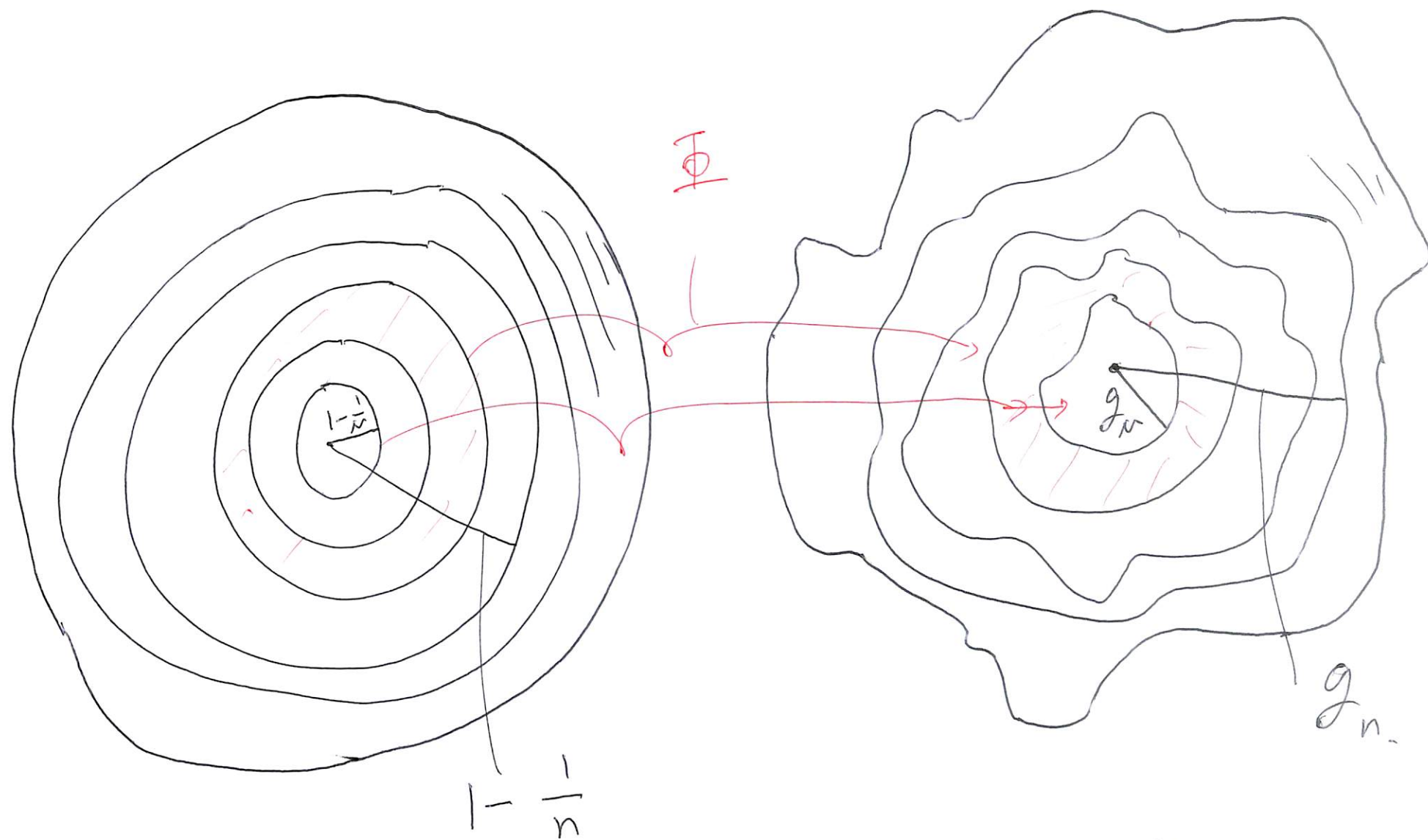


$B(0, 1)$



星型区域 Z .

图 11



$B(0, 1)$

星型領域 g_n

参考文献

[1] Drink Ferus, Analysis III

<http://page.math.tu-berlin.de/ferus/ANA/Ana3.pdf>

(ドイツ語) 2015年10月閲覧

[2] 松本幸夫, 多様体の基礎, 基礎数学5, 東京大学出版会, 1998.