

花井-森田・ストーンの定理

ナンブ キトラ 電波通信

2024 年 1 月 30 日

この文章では花井-森田・ストーンの定理を Bing-長田-Smirnov の距離化可能定理を事実として扱って証明してこの距離化可能定理以外の部分はなるべく自己完結的に記述する．なるべく．

私は Bing-長田-Smirnov の距離化可能定理が基本的だと思っているのでこのような構成にしている．

花井-森田・ストーンの定理とは，距離化可能空間の閉写像による像が距離化可能であるための必要十分条件を述べた定理である．この文章ではこの定理を証明するためにまず距離化可能性が完全写像で保たれることを証明したのちに花井-森田・ストーンの定理を証明する．とりあえず主張を読みたい人は定理 37 がそれなので読むといい．

基本的にセクション 1 から 5 は読み飛ばしてわからなくなったら読み戻ると良いと思う．

目次

1	基本的な記号と定義	2
2	正規性	5
3	可算コンパクト	6
4	閉写像 (と完全写像)	8
5	パラコンパクト性	11
6	完全写像と距離化可能性	17

7	花井-森田・ストーン	20
8	完備距離化可能性	23
	参考文献	25

1 基本的な記号と定義

1.1 記号と概念

定義 1. この文章では写像 $f: X \rightarrow Y$ による Y の部分集合 S の逆像を $f^{\leftarrow}(S)$ と書くことにする. 普通は $f^{-1}(S)$ と書くところである. ただし X の部分集合 A の f による像はただ単に $f(A)$ と書くことにする. たまに $f_{\rightarrow}(A)$ って書いたりするよね.

定義 2 (疎な族). 位相空間 X の部分集合からなる族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が疎 (*discrete*) であるとは X の任意の点 $x \in X$ についてその近傍 N が存在して, N が空でない交わりを持つような $\mathcal{A}$ の元はたかだか一個しかないときにいう. また $\mathcal{A}$ が σ 疎 (σ -*discrete*) であるとはある可算族 $\mathcal{A}_n$ が存在して $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{A}_n$ でありなおかつ各 $\mathcal{A}_n$ は疎であるときにいう.

定義 3 (局所有限族). 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ が局所有限であるとは任意の $x \in X$ についてある x の近傍 N が存在して N と交わりを持つような $\mathcal{A}$ の元が有限個しかない時にいう. つまり集合 $\{i \in I \mid A_i \cap N \neq \emptyset\}$ が有限集合ということである. またこの文章では局所有限な族 $\mathcal{A}$ と $x \in X$ について $\mathcal{A}$ の局所有限性を担保する x の近傍 V という文言をしばしば用いるがこれは x の近傍 V であって $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらないものを指す.

定義 4 (細分). 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ と $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ について $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の細分であるとは任意の $t \in T$ に対して $i \in I$ が存在して $B_t \subset A_i$ となる時にいう.

定義 5 (パラコンパクト). 位相空間 X がパラコンパクトであるとは X の任意の開被覆 $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ に対して $\mathcal{A}$ の細分であるような局所有限な開被覆 $\mathcal{B}$ が存在するときにいう.

定義 6. 位相空間 X とその部分集合 S について S の閉包を $\text{CL}(S)$ で表す. どの空間の閉包か強調するために $\text{CL}_X(S)$ 表すときもある.

定義 7 (閉写像). 位相空間 X, Y の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が**閉写像**であるとは X の閉集合の f による像が Y の閉集合に常になってることである.

ついでに完全写像も定義する.

定義 8 (完全写像). 位相空間 X, Y の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が**完全写像**であるとは f が閉写像でありなおかつ任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ がコンパクトである時にいう.

1.2 基本的なテクニック

補題 9. X を位相空間とする. このとき X の部分集合からなる局所有限な族 $\mathcal{A}$ が疎であることと族 $\{\text{CL}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ が互いに素な族であってなおかつ局所有限であることは同値である.

証明. 簡単なので省略.

一般に $\mathcal{A}$ が互いに素で局所有限であることと $\mathcal{A}$ が疎であることは同値ではない. 閉包をとると交わりを持つような有限族を考えると簡単に反例になっている. 閉包をとった時に互いに素としないといけない. はてなブログ電波通信の過去の記事ではこの間違いが含まれているが簡単に修正できるだろう. $\square$

補題 10. X を位相空間とし $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合からなる局所有限な族とする. このとき

$$\text{CL}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \text{CL}(A_i)$$

が成り立つ.

証明. まず $\text{CL}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \supset \bigcup_{i \in I} \text{CL}(A_i)$ は当たり前である. 逆を示そう. 点 $x \in X$ は $\text{CL}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ の元とする. このとき $\mathcal{A}$ の局所有限性から x の開近傍 N が存在してこれは有限個の $\mathcal{A}$ の元としか交わらない. ここで $S = \{i \in I \mid N \cap A_i \neq \emptyset\}$ と定義する. もちろん S は有限集合である. このとき任意の $i \in I \setminus S$ について $N \cap A_i = \emptyset$ なので $x \notin \text{CL}\left(\bigcup_{i \in I \setminus S} A_i\right)$ である. ここで閉包は有限個の和集合と可換なので

$$\text{CL}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{s \in S} \text{CL}(A_s) \cup \text{CL}\left(\bigcup_{i \in I \setminus S} A_i\right)$$

が成り立つ. $x \notin \text{CL}\left(\bigcup_{i \in I \setminus S} A_i\right)$ なので x は $x \in \bigcup_{s \in S} \text{CL}(A_s)$ を満たす. よって特に

$x \in \bigcup_{i \in I} \text{CL}(A_i)$ である.

□

補題 11. X を位相空間とし $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ は X の部分集合族からなる局所有限な族とする. このとき族 $\{\text{CL}(A_i)\}_{i \in I}$ も局所有限である.

証明. 簡単なので省略する.

□

補題 12. X を位相空間とし $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ は X の閉集合からなる局所有限な族とする. このとき X の部分集合 E について

$$W(E) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I, E \cap A_i = \emptyset} A_i \right)$$

と定義するとこれは開集合になり, $E \subset W(E)$ を満たす. さらに $a \in I$ が $W(E) \cap A_a \neq \emptyset$ を満たすことと $A_a \cap E \neq \emptyset$ は同値である. 特に E が一点集合 $\{x\}$ の時には $W(\{x\}) \cap A_a \neq \emptyset$ であることと $x \in A_a$ となることが同値になる.

証明. $W(E)$ が開集合になることは補題 10 からわかる. 残りは定義を見ればわかる. □

注意. この文章ではこの $W(E)$ を使って手ずから構成した被覆が局所有限であることを示すことが多い.

補題 13. X を位相空間とし, K をそのコンパクト部分集合とする. さらに $\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合からなる局所有限な族とする. このとき K の近傍 U が存在して U は $\{A_i\}_{i \in I}$ の有限個の元としか交わらない.

証明. K の各点について $\{A_i\}_{i \in I}$ の局所有限性を担保するような開近傍を取り, K を被覆する. K のコンパクト性を用いてその有限被覆をとるとその有限被覆の和集合が求める K の近傍になっている. □

補題 14. X を位相空間とし, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ をその疎な族とする. そして族 $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ は $\mathcal{A}$ と同じ添字 I で添字付けされており, 任意の $i \in I$ について $B_i \subset A_i$ を満たすとする. このとき $\mathcal{B}$ も疎である.

証明. 補題 9 からわかる. 直接的な証明ももちろんある. □

2 正規性

定義 15 ($\aleph_0$ -族正規). 位相空間 X が $\aleph_0$ -族正規 ($\aleph_0$ -collectionwise normal) であるとはその任意の閉集合からなる疎な可算族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対して開集合からなる疎な可算族 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して, 任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $A_i \subset U_i$ を満たす時にいう.

一般に族正規というものもあるがそれは族の濃度に制限を加えないものである. さて上で仰々しく定義したこの概念は実はただの正規性と同値になってしまう.

筆者がこのことを知ったのは [Dan Ma] が最初だと思う. これを最初に証明した原論文はおそらく [13] だと思われる.

定理 16. 位相空間 X が正規であることと, $\aleph_0$ -族正規であることは同値である.

証明. $\aleph_0$ -族正規ならば正規であるから X が正規のときにこれが $\aleph_0$ -族正規であることを証明すれば十分である. 可算族 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は疎であり閉集合からなるとする. 各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$B_i = X \setminus \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j \neq i} A_j \right)$$

と定義すると $\mathcal{A}$ が閉集合からなる疎な族であることから各 B_i は開集合である. さらに各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$A_i \subset B_i$$

となることに注意しよう. このとき X の正規性から, 各 i について開集合 P_i が存在して

$$A_i \subset P_i \subset \text{CL}(P_i) \subset B_i$$

となる. ここで $\text{CL}(P_i) \subset B_i$ ということと, B_i の定義から, もしも $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が $j \neq i$ を満たすならば

$$A_j \cap \text{CL}(P_i) = \emptyset$$

であることにも注意しよう.

さて今, 開集合 Q_i を

$$Q_i = P_i \setminus \left(\bigcup_{j \leq i} \text{CL}(P_j) \right)$$

と定義する. このとき各 Q_i は開集合であるし,

$$Q_i \subset P_i$$

である．そして上の注意から

$$A_i \subset Q_i$$

でもある．今から $\{Q_i\}$ が互いに素であることを証明しよう． $i \neq k$ と仮定する．このとき $i < k$ と仮定しても良い．このとき $Q_i \subset P_i$ と Q_k の定義から $Q_i \cap Q_k \neq \emptyset$ となる．ここでさらに X の正規性を用いて

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i \subset W \subset \text{CL}(W) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} Q_i$$

となる開集合 W をとる．ここで $\mathcal{A}$ が疎であることを使って $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ が閉集合であるということを用いていることに注意しよう．そして各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$U_i = W \cap Q_i$$

と定義する．今から $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が疎な族であることを証明しよう．点 $x \in X$ を任意にとる．場合分けを行う．

場合分けその 1. $x \in Q_i$ となる $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する場合．このとき族 $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が互いに素であることから族 $\{U_i\}$ も互いに素である．よって Q_i は U_i のみとしか交わらない．

場合分けその 2. どんな $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ についても $x \notin Q_i$ であるとき．このとき $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} Q_i$ なので，特に $x \notin \text{CL}(W)$ である．よって開集合 $X \setminus \text{CL}(W)$ は x の近傍であると同時にいかなる U_i とも交わりを持たない．

以上のことから $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が疎な族であることがわかった． $\mathcal{A}$ は任意であったので，結局 X が $\aleph_0$ -族正規であることが証明された． $\square$

以下の命題は [電波通信 4] などを参照のこと．

事実 17. 位相空間 X が正規であることと以下の命題は同値である． X の開集合からなる任意の局所有限被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ について $\text{CL}(V_i) \subset U_i$ が成り立つ．

3 可算コンパクト

このセクションは [電波通信 1] の引き写しである．

定義 18 (可算コンパクト)．位相空間 X が可算コンパクトであるとは，その任意の可算開被覆について有限な部分被覆を選べるときにいう．

定義 19 (完全集積点). 位相空間 X の部分集合 A について, $x \in X$ が A の**完全集積点**であるとは, x の任意の開近傍 U について

$$\text{card}(A) = \text{card}(U \cap A)$$

となるときにいう.

定理 20. 位相空間 X について以下は同値である.

- (1) X は可算コンパクトである.
- (2) X の任意の可算部分集合 A に完全集積点が存在する.
- (3) X の任意の無限部分集合 A について点 $a \in X$ が存在して a の任意の近傍 N について

$$\text{card}(A \cap N) \geq \aleph_0$$

が満たされる.

証明. (2) と (3) が同値であることはよくわかる. (1) と (2) が同値であることを示そう. 対偶を証明する.

$[\neg(2) \implies \neg(1) \text{ の証明}]$

$\neg(2)$ より, 完全集積点を持たない可算無限集合 A が存在する. 完全集積点を持たないので各点 $x \in X$ について x の近傍 U_x が存在して $\text{card}(U_x \cap A) < \aleph_0$ となる. さて A の有限部分集合 S について

$$O_S = \bigcup \{U_x \mid U_x \cap A = S\}$$

と定義しよう. A の有限部分集合全体 $\mathcal{F}$ は可算集合であるから, $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ は可算な族であり, X の開被覆である. しかし構成の仕方からわかるように $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ の有限部分被覆 $\mathcal{U}$ の和集合 $\bigcup \mathcal{U}$ と A について $(\bigcup \mathcal{U}) \cap A$ は有限集合である. よって $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ が成り立つ. つまり $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ は有限部分被覆を持たない X の可算開被覆である. ゆえに X は可算コンパクトでない.

$[\neg(2) \implies \neg(1) \text{ 終わり}]$

$[\neg(1) \implies \neg(2) \text{ の証明}]$

X は可算コンパクトでないから有限部分被覆を持たない可算開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する. そこで $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を

$$a_n \notin \bigcup_{i=0}^n U_i$$

でかつ $n \neq m \implies a_n \neq a_m$ となるように選ぶ (これはちゃんと実行できる). そして $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とすると A は可算無限集合である. これが完全集積点を持たないことを示そう. 任意の $x \in X$ について $x \in U_m$ となる U の元をとると, 構成の仕方から U_m は高々 $m+1$ 個の A の元としか交わらない. よって x は任意であったから A は完全集積点を持たない X の可算部分集合である.

$[\neg(1) \implies \neg(2) \text{ 終わり}]$

□

系 21. T_1 位相空間 X が可算コンパクトでないとすると, X の閉集合であるような可算離散空間 $A = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する. 特にこのような $\{\{p_i\}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は疎な族でもある.

証明. 今 X は可算コンパクトではないので定理 20 から完全集積点を持たないような可算部分集合 $A = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する. 今から $\{\{p_i\}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が疎であることを証明しよう. どの点 $x \in X$ も A の完全集積点ではないので x の近傍 M が存在して $\text{card}(A \cap M) < \aleph_0$ となる. 今 X は T_1 と仮定しているので, 有限集合 $S = (A \cap M) \setminus \{x\}$ は閉集合である. よって $N = M \setminus S$ とすればこれは $\text{card}(A \cap N) \leq 1$ を満たす. よって $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は疎な族である. このことから A が離散集合で閉集合であることもわかる. □

4 閉写像 (と完全写像)

このセクションは [電波通信 2] の引き写しである.

次の良さのある命題が成り立つ.

命題 22 (射影公式). 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $A \subset X$, $B \subset Y$ について

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$$

が成り立つ.

証明. 簡単なので省略

□

系 23. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $A \subset X$, $B \subset Y$ について

$$A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \iff f(A) \cap B = \emptyset$$

が成り立つ.

証明. $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ と射影公式からすぐにわかる.

□

定義 24 (小像 (small image)). $A \subset X$ の写像 $f: X \rightarrow Y$ による小像とは

$$f_?(A) = Y \setminus f(X \setminus A)$$

のことである.

注意. 元の記事 [電波通信 2] では小像は $f_!$ って書いていたが元ネタがなんなのかわからなかったのとまあ今回は $f_?$ と書くことにした. おそらく層の理論のコンパクトサポートのやつのような気がするが何を思ってこの記号で書いたのかよくわからない. 小像という名前も由来がわからない. 圏論で逆像と順像が随伴で逆像には小像も随伴になっているので逆像は cup と cap が交換するみたいな話が元ネタだった気がするがどこで聞いたのかわからない. おそらく参考文献 [alg-d] あたりが元ネタかと思う. ちなみに順像 $f(A)$ は $\exists x \in A \varphi(x)$ に対応していて小像 $f_?(A)$ は $\neg \forall x \in A \neg \varphi(x)$ に対応しているような気がする.

小像は一見掴みどころが無いように見えるが、次の命題を見ればなんとなくわかると思う.

命題 25. 写像 $f; X \rightarrow Y$ と $A \subset X$ について

$$y \in f_?(A) \iff f^{\leftarrow}(y) \subset A$$

が成り立つ. 特に $S \subset Y$ について

$$S \subset f_?(A) \iff f^{\leftarrow}(S) \subset A$$

が成り立つ.

証明. 先の系を用いて

$$\begin{aligned} y \in f_?(A) &\iff y \notin f(X \setminus A) \iff \{y\} \cap f(X \setminus A) = \emptyset \\ &\iff f^{\leftarrow}(y) \cap (X \setminus A) = \emptyset \iff f^{\leftarrow}(y) \subset A \end{aligned}$$

となり前半が成り立つ. 後半も同様. □

補題 26. 写像 $f; X \rightarrow Y$ と $A \subset X$ について $f_?(A) \subset f(A)$ が成り立つ.

証明. 当たり前. □

さて次の命題に移る前に位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ について $A \subset X$ の近傍とは $A \subset \text{INT}(V)$ となる集合 V のことであったことを思い出そう. $A = \{x\}$ のとき、 $A = \{x\}$ の近傍は点 x の近傍と同じ意味である.

次の便利な閉写像の特徴付けがある。

定理 27. 位相空間 X, Y の間の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ について以下は同値

- (1) 写像 f は閉写像である.
- (2) 写像 f による X の開集合の小像は Y の開集合である.
- (3) 任意の $S \subset Y$ と $f^{-1}(S)$ の任意の近傍 U について S の近傍 V が存在して

$$f^{-1}(S) \subset f^{-1}(V) \subset U$$

が成り立つ.

- (4) 任意の $y \in Y$ と $f^{-1}(y)$ の任意の近傍 U について y の近傍 V が存在して

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset U$$

が成り立つ.

証明. (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3), (3) $\implies$ (4), (4) $\implies$ (1) の順番で証明する.

[(1) $\implies$ (2) の証明]

U を X の開集合とする. このとき $X \setminus U$ は閉集合であるから f は閉写像なので $f(X \setminus U)$ は Y の閉集合である. よって $f_?(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ は開集合である.

[(1) $\implies$ (2) の証明終わり]

[(2) $\implies$ (3) の証明]

$f^{-1}(S)$ の近傍 U は開近傍としてもよい. 条件 (2) から U の小像 $f_?(U)$ は開集合で $f^{-1}(S) \in U$ より $S \subset f_?(U)$ である. $V = f_?(U)$ とすれば

$$S \subset V = f_?(U) \subset f(U)$$

なので $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(V) \subset U$ が成り立つ.

[(2) $\implies$ (3) の証明終わり]

[(3) $\implies$ (4) の証明]

自明.

[(3) $\implies$ (4) の証明終わり]

[(4) $\implies$ (1)] の証明]

A を X の閉集合とする. そして $y \notin f(A)$ を任意に取る. すると系??より

$$\{y\} \cap f(A) = \emptyset \iff f^{-1}(y) \cap A = \emptyset \iff f^{-1}(y) \subset X \setminus A$$

となる． $X \setminus A$ は開集合なので条件 (3) から y の開近傍 V が存在して

$$f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(V) \subset X \setminus A$$

となる．ここで系 23 より

$$f^{\leftarrow}(V) \subset X \setminus A \iff f^{\leftarrow}(V) \cap A = \emptyset \iff V \cap f(A) = \emptyset$$

となり y は $y \notin f(A)$ となる任意の Y の元なので $Y \setminus f(A)$ は開集合となり，結局 $f(A)$ が閉集合であることがわかる．ここで A は X の任意の閉集合であったので f は閉写像である．

[(4) $\implies$ (1)] の証明終わり]

以上で全ての証明が終わる．

□

系 28. 正規ハウスドルフ空間の閉像は正規ハウスドルフ．

5 パラコンパクト性

このセクションではパラコンパクト性に関する命題を証明する．

以下の命題は [18] の Lemma 1 が最初だと思う．

定理 29. X を正則ハウスドルフ空間とする．このとき X がパラコンパクトであることと X の任意の開被覆にはその細分であるような X の閉集合からなる被覆が存在することが同値である．

証明．まず最初に X がパラコンパクトであると仮定する．そして $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の任意の開被覆とする．このとき $\mathcal{A}$ の細分であるような開集合からなる局所有限な被覆 $\mathcal{B} = \{V_t\}_{t \in T}$ が存在する．パラコンパクトハウスドルフ空間は正規なので X は正規である．よって開集合からなる被覆 $\mathcal{C} = \{O_t\}_{t \in T}$ であって $\text{CL}(C_t) \subset V_t$ となるものが存在する (事実 17)．ここで $\mathcal{D} = \{\text{CL}(C_t)\}_{t \in T}$ とおくとこれは $\mathcal{A}$ の細分であって閉集合からなる局所有限な被覆になっている (補題 11)．これで前半の証明が終わる．

後半を示そう．つまり X の任意の開被覆にはその細分であるような X の閉集合からなる被覆が存在すると仮定しよう．今から X がパラコンパクトであることを示す．

空間 X の任意の開被覆を $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ としよう．空間 X に関する仮定から，族 $\mathcal{A}$ にはその細分であるような閉集合からなる局所有限な被覆 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ が存在する．ここで各点 $x \in X$ について Q_x で $\mathcal{B}$ の局所有限性を担保するような x の開近傍の一つを表す

とする. このとき $\mathcal{C} = \{Q_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆であるから X に関する仮定から $\mathcal{C}$ の細分であって閉集合からなる局所有限な細分 $\mathcal{D} = \{D_r\}_{r \in R}$ が存在する. 今 X の部分集合 A について $W(A)$ を以下のように定義する.

$$W(A) = X \setminus \left(\bigcup_{l \in R, A \cap D_l = \emptyset} D_{s,l} \right)$$

族 $\mathcal{D}$ の局所有限性から $W(A)$ は開集合でありさらに $A \subset W(A)$ を満たす (補題 12).

今から $\{W(B_t)\}_{t \in T}$ が局所有限であることを証明する. 任意に点 $x \in X$ をとる. ここで

$$Z_0 = \{r \in R \mid x \in D_r\}$$

かつ

$$Z_1 = \{t \in T \mid r \in Z_0, B_t \cap D_r \neq \emptyset\}$$

と定義する. 族 $\mathcal{D}$ の局所有限性から Z_0 が有限であることがわかる. さらに Z_0 の有限性と $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の細分であることから Z_1 が有限であることがわかる.

今ここで $t \in T$ は $W(B_t) \cap W(\{x\}) \neq \emptyset$ を満たすと仮定しよう. この交わりから点 y をとる. 族 $\mathcal{D}$ が被覆になっていることから $y \in D_r$ となる $r \in R$ が取れる. さて $W(\{x\})$ の定義と $y \in W(\{x\})$ であることから $x \in D_r$ でもある. つまり $r \in Z_0$ である. さらに $y \in W(B_t)$ と $W(B_t)$ の定義から $D_r \cap B_t \neq \emptyset$ である. ここで $r \in Z_0$ であったから $t \in Z_1$ である. 上で話したことから Z_1 は有限集合であるから $W(\{x\})$ は有限個の $W(B_t)$ としか交わらないことが従う. よって $\{W(B_t)\}_{t \in T}$ は局所有限である.

各 $t \in T$ について記号 $i(t) \in I$ で $B_t \subset U_{i(t)}$ となるようなものとする. このとき

$$\mathcal{E} = \{W(B_t) \cap U_{i(t)}\}_{t \in T}$$

を考えるとこれは $\mathcal{A}$ の細分であって局所有限である. さらに任意の $t \in T$ について $B_t \subset W(B_t)$ でなおかつ $B_t \subset U_{i(t)}$ なので, 族 $\mathcal{B}$ が X の被覆であることから $\mathcal{E}$ も X の被覆である.

以上の議論から X はパラコンパクトである. □

完全写像と局所有限族に関して以下の補題は便利である.

補題 30. X と Y を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ は完全写像とする. そして $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ は X の部分集合からなる局所有限な族とする. このとき Y の開集合からなる被覆 $\{O_t\}_{t \in T}$ であって, 任意の $t \in T$ について $f^{-1}(O_t)$ は有限個の $\mathcal{A}$ の元としか交わらないようなものが存在する.

証明. 任意に点 $y \in Y$ をとる. 集合 $f^{\leftarrow}(y)$ がコンパクトであることと補題 13 から $f^{\leftarrow}(y)$ の近傍 U であって U は $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらないものが存在する. 次に定理 27 の条件 (4) から y の開近傍 O_y が存在して $f^{\leftarrow}(O_y) \subset U$ となる. この包含関係から $f^{\leftarrow}(O_y)$ も $\mathcal{A}$ の有限個の元としか交わらない. 点 $y \in Y$ は任意だったので, これで証明が終わる. $\square$

以上のことを用いてパラコンパクト性が完全写像で保たれることを示そう. ただし実際にはパラコンパクト性は閉写像だけでも保たれる (論文 [15] を参照のこと). 完全写像の場合は少々簡単に証明できるしせっかくなので証明しておく.

定理 31. X をパラコンパクトハウスドルフ空間とし, Y を位相空間で $f: X \rightarrow Y$ は全射な完全写像とする. このとき Y もパラコンパクトハウスドルフである.

証明. まず f が閉写像であるから Y は正規ハウスドルフである. よって Y がパラコンパクトであることを証明すれば良い. Y の任意の開被覆を $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ とする. このとき $\mathcal{B} = \{f^{\leftarrow}(U_i)\}_{i \in I}$ は X の開被覆である. よって X のパラコンパクト性から $\mathcal{B}$ の細分であるような閉集合からなる X の被覆 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t \in T}$ が存在する (定理 29).

このとき $\mathcal{D} = \{f(C_t)\}_{t \in T}$ が $\mathcal{A}$ の細分であるような閉集合からなる被覆であることを証明しよう. そうすると再び定理 29 を用いて Y がパラコンパクトであることが従う.

まず $\mathcal{B}$ が X の被覆であることと f が全射であることから $\mathcal{D}$ が Y の被覆であることはわかる. 写像 f が閉写像なので $\mathcal{D}$ が閉集合からなることもわかる.

次に $\mathcal{D}$ が $\mathcal{A}$ の細分であることを証明しよう. まず $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ の細分なので各 $t \in T$ について $i \in I$ が存在して $C_t \subset f^{\leftarrow}(U_i)$ を満たす. よって $f(C_t) \subset U_i$ である. これで $\mathcal{D}$ が $\mathcal{A}$ の細分であることがわかった.

今から $\mathcal{D}$ が局所有限であることを証明しよう. 点 $x \in Y$ をとる. すると補題 30 から x の近傍 V が存在して $f^{\leftarrow}(V)$ は $\mathcal{C}$ の有限個の元としか交わらない. 開集合 $f^{\leftarrow}(V)$ と交わる $\mathcal{C}$ の元を $C_{t_1}, \dots, C_{t_m}$ と書こう. さて $f(C_t) \cap V \neq \emptyset$ であると仮定しよう. すると命題 22 から $f(C_t \cap f^{\leftarrow}(V)) = f(C_t) \cap V$ なので特に $f(C_t \cap f^{\leftarrow}(V)) \neq \emptyset$ である. よって $C_t \cap f^{\leftarrow}(V) \neq \emptyset$ が従う. ゆえに, $C_{t_1}, \dots, C_{t_m}$ の定義からある $k \in \{1, \dots, m\}$ が存在して $C_t = C_{t_k}$ となる. つまり V と交わるような $\mathcal{D}$ の元はせいぜい $f(C_{t_1}), \dots, f(C_{t_m})$ だけである. よって $\mathcal{D}$ は局所有限である. これで証明が終わる. $\square$

パラコンパクト空間の開被覆には σ 疎な細分が存在することを証明しよう. これは距離化可能性が完全写像で保たれるということの証明に用いる. このような性質は strongly screenable と呼ばれているようで (論文 [20] など参照のこと), 実際にはこの性質は, 空

間の正則性を仮定した上でパラコンパクト性と同値である (論文 [18] などを参照のこと).

定理 32. X をハウスドルフ空間とする. このとき X がパラコンパクトであるならば X の任意の開被覆に対してその細分であって, 開集合からなるような σ 疎な被覆が存在する.

証明. 族 $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の任意の開被覆とする. 今から $\mathcal{A}$ にその細分であって, 開集合からなる被覆であってさらに σ 疎なものが存在することを示そう. X をパラコンパクトとしているので $\mathcal{A}$ は最初から局所有限と仮定しても良い.

まず X はパラコンパクトハウスドルフなので正規である. そして正規性を用いると開集合の被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ であって任意の $i \in I$ について $\text{CL}(V_i) \subset U_i$ を満たすものが存在する (事実 17). 再び正規性とウリゾーンの補題から連続関数 $f_i: X \rightarrow [0, 1]$ であって $\text{CL}(V_i)$ 上では 1 で $X \setminus U_i$ 上では 0 になるようなものが存在する. 各 $i \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$G(i, n) = f_i^{\leftarrow}((2^{-n-1}, 1])$$

と定義すると以下の条件を満たす.

- (1) 任意の $i \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\text{CL}(V_i) \subset \text{CL}(G(i, n)) \subset G(i, n+1) \subset U_i$ を満たす.
- (2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定すると $\{G(i, n)\}_{i \in I}$ は $\mathcal{A}$ の細分であって X の局所有限な開被覆になっている.

この $G(i, n)$ を利用して σ 疎な族を構成しよう. 整列可能定理から添字集合 I は適当な順序 $<$ によって整列されているとしても良い. そして各 $i \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$O(i, n) = G(i, n) \setminus \left(\bigcup_{k < i} \text{CL}(G(i, n+2)) \right)$$

および

$$L(i, n) = \text{CL}(G(i, n)) \setminus \left(\bigcup_{k < i} (G(i, n+1)) \right)$$

と定義すると, 族 $\{G(i, n+2)\}_{i \in I}$ の局所有限性から $O(i, n)$ は開集合であり, さらに定義から $L(i, n)$ は閉集合である. ここでさらに定義からして

$$\text{CL}(O(i, n)) \subset L(i, n)$$

が成り立つ.

さて各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\mathcal{O}_n = \{O(i, n) \mid i \in I\}$$

および

$$\mathcal{L}_n = \{L(i, n) \mid i \in I\}$$

と定義して

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{O}_n$$

かつ

$$\mathcal{L} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{L}_n$$

と定義する. 今から $\mathcal{O}$ が $\mathcal{A}$ の細分であり, σ 疎で X の開被覆であることを証明しよう.

まず最初に $\mathcal{L}$ が $\mathcal{A}$ の細分であることはすぐにわかる. よって $\mathcal{O}$ も $\mathcal{A}$ の細分である.

次に族 $\mathcal{O}$ が X の被覆であることを証明しよう. 点 $x \in X$ を任意にとる. このとき $a \in I$ を $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} G(a, n)$ となる最小の $a \in I$ とする. そして $x \in G(a, m)$ となる. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を適当になんでもいいのでとる. さて $k < a$ となる $k \in I$ については, a の最小性から $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} G(k, n)$ なので特に $x \notin G(k, m+3)$ である. ここで $\text{CL}(G(k, m+2)) \subset G(k, m+3)$ なので $x \notin \text{CL}(G(k, m+2))$ がわかる. よって $x \in O(a, m)$ となる. つまり $\mathcal{B}$ は被覆になっている. さらに $\mathcal{O}$ は $\mathcal{L}$ の細分でもあるので, 族 $\mathcal{L}$ も X の被覆であることがわかる.

次に $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定して族 $\mathcal{L}_n$ が疎な族であることを示そう. 族 $\mathcal{L}_n$ は閉集合からなる族なので, これが疎であることを示すにはこれが互いに素でなかつ局所有限であることを示せば良い (補題 9).

最初に $\mathcal{L}_n = \{L(i, n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が互いに素であることを示そう. 任意に異なる $i, a \in I$ をとる. このとき $i < a$ と仮定しても良い. すると $L(i, n) \subset \text{CL}(G(i, n)) \subset G(i, n+1)$ なので, $L(a, n)$ の定義から $G(i, n+1) \cap L(a, n) = \emptyset$ である. 特に $L(i, n) \cap L(a, n) = \emptyset$ である. これで互いに素であることが証明できた.

次に $\mathcal{L}_n$ が局所有限であることを示そう. 任意に点 $x \in X$ をとる. さらに適当に $x \in G(a, m)$ となる $a \in I$ と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとる. ここで, a を固定したとき $\{G(a, b)\}_{b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は開集合の増大列になっているので, お望みであれば m を十分大きくとっても構わない. どれくらい大きくとるかということ $n+10 < m$ くらい取れば今回は十分である. そして集合 W_x を

$$W_x = X \setminus \left(\bigcup_{j \in I, x \notin \text{CL}(G(j, m))} \text{CL}(G(j, m)) \right)$$

とする (補題 12). このとき族 $\{G(i, m)\}_{i \in I}$ が局所有限であることから W_x は x の開近傍になる. 今から W_x と交わるような $\mathcal{L}_n$ の元は有限個しかないことを示そう. 添字 $i \in I$ は $W_x \cap L(i, n) \neq \emptyset$ を満たすとしよう. すると m が十分大きいことから

$$L(i, n) \subset \text{CL}(G(i, n)) \subset G(i, m)$$

となるので $W_x \cap G(i, m) \neq \emptyset$ となる. 集合 W_x の定義から $x \in \text{CL}(G(i, m))$ でなければならない. 族 $\{\text{CL}(G(i, k))\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の局所有限性からこのような i は有限個しかない. よって $W_x \cap L(i, n) \neq \emptyset$ となるような $i \in I$ は有限個しかない. つまり $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定したとき $\{L(i, n)\}_{i \in I}$ は局所有限である.

以上で n を固定したとき $\mathcal{L}_n$ は疎な族であることがわかった. さて $\text{CL}(\mathcal{O}(i, n)) \subset L(i, n)$ が成り立つので $\mathcal{O}_n$ も疎であることがわかる (補題 9 と補題 14).

以上で $\mathcal{O}$ は $\mathcal{A}$ の σ 疎な細分であることがわかった. これで証明が終わる. $\square$

注意. 以上の証明は, 「コゼロ被覆で細分するといいいことがある」という「児玉・永見」に流れる考えの実践とみなすことができる.

以下の命題はこの文書では使わないと思うがせっくなので証明する. この命題自体は陰に Stone によるパラコンパクト性と fully normality の同値性の証明で表れていたと思う ([22]).

定理 33. X をハウスドルフ空間とする. このとき X がパラコンパクトであることと X の任意の開被覆に対してその細分であって, 局所有限でなおかつ σ 疎な開集合からなる被覆が存在することは同値である.

証明. まず X の任意の開被覆に対してその細分であって, 局所有限でなおかつ σ 疎な開集合からなる被覆が存在すると仮定する. 局所有限な開集合の被覆で細分になっているものが取れているので X はパラコンパクトである. 逆向きがこの定理の本質的な部分である.

次に X をパラコンパクトと仮定しよう. そして $\mathcal{A}$ をその任意の開被覆とする. このとき定理 32 から $\mathcal{A}$ の細分であるような開集合からなる被覆 $\mathcal{B}$ であって σ 疎なものが存在する. ここで $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{B}_n$ と表して各 $\mathcal{B}_n$ は疎な集合族とする.

さて各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$P_n = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} U$$

と定義する. するとこれは開集合でありさらに族 $\mathcal{P} = \{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は X の開被覆となる.

ここで X のパラコンパクト性を用いると局所有限な開被覆 $\mathcal{W} = \{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ であって $W_n \subset P_n$ を満たすものが存在する．そして各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\mathcal{M}_n = \{W_n \cap U \mid U \in \mathcal{B}_n\}$$

と定義する．この族は疎である．というのも任意の $U \in \mathcal{B}_n$ について $W_n \cap U \subset U$ であり，なおかつ $U, V \in \mathcal{B}_n$ が $U \neq V$ を満たすならば $(W_n \cap U) \cap V = \emptyset$ が成り立つからである．これらの性質と $\mathcal{B}_n$ が疎であることから $\mathcal{M}_n$ が疎であることがわかる．さらに $\mathcal{W}$ が開被覆であることから $\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{M}_n$ も X の開被覆になっていることに注意しよう．さらに $\mathcal{M}$ は $\mathcal{A}$ の細分でもある．

今から族 $\mathcal{M}$ が局所有限であることを示そう．点 $x \in X$ を任意にとる．すると x の開近傍 O が存在して O は有限個の $W_{m_1}, \dots, W_{m_k}$ としか交わりを持たない．ここで各 $m_i, i = 1, \dots, k$ について $\mathcal{B}_n$ が疎であることを用いると十分小さい近傍 N が存在して N は任意の $i = 1, \dots, k$ について $\mathcal{B}_n$ の元とたかだか一個としか交わらない．よって $O \cap N$ は x の開近傍で $\mathcal{M}$ のたかだか k 個の元としか交わらない．よって $\mathcal{M}$ は局所有限である．以上で証明が終わる． $\square$

6 完全写像と距離化可能性

以下は Bing–長田–Smirnov である．証明とか原論文などは [電波通信 3] で紹介されていると思う．

事実 34. 正則ハウスドルフ空間 X に関して， X が距離化可能であることと X に σ 疎な開基が存在することは同値である．

今から距離化可能性が完全像で保たれることを証明しよう．これが花井–森田・ストーンの定理の中で一番難しい部分だと思われる．

定理 35. X を距離化可能空間とする．そして Y を位相空間とし，写像 $f: X \rightarrow Y$ は全射連続でなおかつ完全写像とする．このとき Y は距離化可能である．

証明．まず f が閉写像であることから Y が正規ハウスドルフになることに注意しよう．よって Y が σ 疎な開基を持つことを示せば良い．また定理 31 から Y はパラコンパクトであることに注意しよう．

Bing–長田–Smirnov の定理 (事実 34) を用いて距離化可能空間 X の σ 疎な開基を $\mathcal{B}$ とし，そして $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{B}_n$ と表示して各 $\mathcal{B}_n$ は疎であるとする．

自然数の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の空でない有限集合全体の集合を $\mathfrak{F}$ と書くことにする．このとき $\mathfrak{F}$ は可算無限集合であることに注意しよう．

各 $S \in \mathfrak{F}$ について B_S という記号で族 $\bigcup_{i \in S} B_i$ を表すことにする．各 B_i が疎で, S が有限集合であることから B_S は X の局所有限な族になっている．

さて $S \in \mathfrak{F}$ を任意に固定する．空間 X の局所有限 B_S に補題 30 を適応すると Y の開被覆 $\mathcal{Q}_S$ であって任意の $O \in \mathcal{Q}_S$ について $f^{\leftarrow}(O)$ は B_S の有限個の元としか交わりを持たない．ここで Y はパラコンパクトハウスドルフ空間なので定理 32 を $\mathcal{Q}$ に適応してこの細分になるような開被覆 $\mathcal{V}_S$ であって σ 疎なものが取れる．ここで

$$\mathcal{V}_S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{V}_{S,n}$$

と表示して各 $\mathcal{V}_{S,n}$ は疎であるとする．この $\mathcal{V}_S$ が $\mathcal{Q}_S$ の細分であることから各 $V \in \mathcal{V}_S$ について $f^{\leftarrow}(V)$ は B_S の有限個の元としか交わらない．

さてここで各 $S \in \mathfrak{F}$ と $V \in \mathcal{V}_S$ に対して集合

$$\mathfrak{C}(V)$$

を B_S の元であって $f^{\leftarrow}(V)$ と交わるもの全体とする．もちろん $\mathfrak{C}(V)$ は有限集合である．さらに各 $V \in \mathcal{V}_S$ に対して写像

$$\tau_V: \mathfrak{C}(V) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を適当になんでもいいので単射な写像としてとり固定する．単射であればなんでもいい．これは $\mathfrak{C}(V)$ が有限集合なので可能である．この写像 τ_V は $\mathfrak{C}(V)$ の番号付けということである．さらに各 $T \in \mathfrak{F}$ について集合

$$\mathfrak{C}(V; T)$$

を $\mathfrak{C}(V)$ の元 B であって $\tau_V(B) \in T$ となるもの全体とする．つまり $\mathfrak{C}(V; T)$ とは $\mathfrak{C}(V)$ の元であってその番号が T に属しているもの全体ということである．

各 $S \in \mathfrak{F}$ と $V \in \mathcal{V}_S$, そして $T \in \mathfrak{F}$ について

$$W(V, T) = \bigcup_{B \in \mathfrak{C}(V; T)} f^{\leftarrow}(V) \cap B$$

と定義する．これはただ単に $\mathfrak{C}(V; T)$ の和集合と $f^{\leftarrow}(V)$ の交わりである．この $W(V, T)$ は開集合であることに注意しよう．そして $V \in \mathcal{V}_{S,n}$ について

$$O(V, T) = f_?(W(V, T))$$

と定義する．集合 $W(V, T)$ が $f^{\leftarrow}(V)$ の部分集合であったことから $O(V, T) \subset V$ であることに注意しよう．さらに一般に $O(V, T)$ は空集合になることもありうるが，別に空集合だとしても以下の議論には差し障りはないのでそういうことはあまり気にしないことにする．

各 $S \in \mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $T \in \mathfrak{F}$ について

$$\mathcal{C}_{S,n,T} = \{O(V, T) \mid V \in \mathcal{V}_{S,n}\}$$

と定義する．これは開集合からなる Y の族である．今からこの $\mathcal{C}_{S,n,T}$ が疎であることを確かめよう．まず任意の V について $O(V, T) \subset V$ である．よって $\mathcal{V}_{S,n}$ が疎であることから $\mathcal{C}_{S,n,T}$ も疎な族であることがわかる (補題 14)．

ここで

$$\mathcal{C} = \bigcup_{S \in \mathfrak{F}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, T \in \mathfrak{F}} \mathcal{C}_{S,n,T}$$

と定義する．上で述べたことから各 $\mathcal{C}_{S,n,T}$ が疎であり， $\mathfrak{F}$ と $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が可算集合であることから $\mathcal{C}$ は σ 疎である．

今からこの $\mathcal{C}$ が Y の開基になっていることを証明しよう．点 $y \in Y$ と Y の開集合 U を任意に取り $y \in U$ を満たしているとしよう．今からある $C \in \mathcal{C}$ が存在して $y \in C \subset U$ となることを示そう．まず当たり前だが， $y \in U$ から $f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(U)$ となっている．今 $\mathcal{B}$ が開基であることと， $f^{\leftarrow}(y)$ がコンパクトであることからある有限集合 $S_y \in \mathfrak{F}$ と有限族 $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_{S_y}$ が存在して

$$f^{\leftarrow} \subset \bigcup \mathcal{E} \subset f^{\leftarrow}(V)$$

が成り立つ．ここで以下の話を簡単にするために任意の $B \in \mathcal{E}$ については $f^{\leftarrow}(y) \cap B \neq \emptyset$ となっていると仮定する．お望みであれば，こういうふうになるように $\mathcal{E}$ を選び直せる．この時ある $n_y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $V \in \mathcal{V}_{S_y, n_y}$ が存在して $y \in V$ が成り立つ．すると $f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(V)$ であることと， $\mathcal{E}$ の元は $f^{\leftarrow}(y)$ と交わるように取っていることから $\mathcal{E} \subset \mathfrak{C}(V)$ がわかる．そして $T_y \in \mathfrak{F}$ を $T_y = \{\tau_V(B) \mid B \in \mathcal{E}\}$ と定義する．写像 τ_V が単射であることから $\mathfrak{C}(V; T_y) = \mathcal{E}$ がわかる．このとき

$$W(V, T_y) = f^{\leftarrow}(V) \cap \bigcup \mathcal{E}$$

である．ゆえに $f^{\leftarrow}(y) \subset \bigcup \mathcal{E}$ であることと $y \in V$ であることから

$$f^{\leftarrow}(y) \subset W(V, T_y) \subset \bigcup \mathcal{E} \subset f^{\leftarrow}(U)$$

である。この包含関係から

$$y \in O(V, T_y) \subset U$$

がわかる (定理 27 の条件 (4)). そして集合 $O(V, T_y)$ は族 $\mathcal{C}_{S_y, n_y, T_y}$ に属する。なので y と U が任意であったことから $\mathcal{C}$ が開基であることがわかった。

以上のことと Bing–長田–Smirnov の定理 (事実 34) から Y が距離化可能であることが証明された。□

7 花井–森田・ストーン

以下では、位相空間 X の部分集合 A についてその境界を $\text{Fr}A$ と書くことにする。

おそらく花井–森田・ストーンの定理で本質的なのは閉写像に関する以下の現象である。この手の類の現象を初めて見出したのは [24] だと思われる。論文 [16] も参照のこと。

定理 36. X を T_1 正規位相空間とし、 Y を第一可算な位相空間とする。そして写像 $f: X \rightarrow Y$ は連続で閉写像であるとする。このとき任意の $y \in Y$ について $\text{Fr}f^{\leftarrow}(y)$ は可算コンパクトである。

証明。まず最初に f は全射であると仮定しても良い。そして T_1 であることは閉写像によって保たれるので Y は T_1 空間になる。

定理は背理法によって証明する。つまり、ある $y \in Y$ について $\text{Fr}f^{\leftarrow}(y)$ は可算コンパクトではないとする。

ここで Y は T_1 なので $f^{\leftarrow}(y)$ は閉集合であり特に $\text{Fr}f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(y)$ であることに注意しよう。

このとき系 21 から $\text{Fr}f^{\leftarrow}(y)$ の閉な可算離散部分空間 $A = \{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する。定理の仮定から Y は第一可算なので y の可算な近傍系 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在する。定理 16 から疎な開集合の族 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $p_i \in U_i$ となる。ここで $f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(V_i)$ と $f^{\leftarrow}(V_i)$ が開集合であること、そして $\text{Fr}f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(y)$ を用いると、 $U_i \cap f^{\leftarrow}(V_i)$ は p_i の開近傍であり族 $\{U_i \cap f^{\leftarrow}(V_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は疎な開集合からなる族である。

さてここで $p_i \in \text{Fr}f^{\leftarrow}(y)$ であることから、各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $q_i \in U_i \cap f^{\leftarrow}(V_i)$ であってなおかつ $q_i \notin f^{\leftarrow}(y)$ となる $q_i \in X$ が存在する。族 $\{U_i\}$ が疎であることから $\{\{q_i\}\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ も疎な族であり (補題 14), 集合 $B = \{q_i \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は X の閉集合である (補題 10)。ここで $B \cap f^{\leftarrow}(y) = \emptyset$ に注意しよう。

さて今 $f: X \rightarrow Y$ は閉写像なので $f(B)$ も閉集合である。さらに $B \cap f^{\leftarrow}(y) = \emptyset$ であ

ることから $y \notin f(B)$ なので $y \in Y \setminus f(B)$ である。思い出して欲しいのだが $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は y の基本近傍系であり, なおかつ $Y \setminus f(B)$ は y を含む開集合なので $y \in V_k \subset Y \setminus f(B)$ となる $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。

集合 $f(B)$ は Y の閉集合であったから $Y \setminus f(B)$ は Y の開集合である。よってその引き戻し $f^{\leftarrow}(Y \setminus f(B))$ は X の開集合である。ここで帰属関係及び包含関係

$$y \in V_k \subset Y \setminus f(B)$$

から

$$f^{\leftarrow}(y) \subset f^{\leftarrow}(V_k) \subset f^{\leftarrow}(Y \setminus f(B))$$

が従う。さて q_k の定義から $q_k \in f^{\leftarrow}(V_k)$ であるがこれは $q_k \in f^{\leftarrow}(Y \setminus f(B))$ を意味する。しかしこのことから $f(q_k) \in Y \setminus f(B)$ がわかるが, これは $q_k \in B$ に矛盾する。

以上の議論から任意の $y \in Y$ について $\text{Fr} f^{\leftarrow}(y)$ は可算コンパクトである。 $\square$

距離化可能空間の閉像が距離化可能になるために必要十分条件を述べた以下の定理が花井-森田・ストーンの定理である。

花井-森田による共著 [19] とストーンの論文 [23] が同時に発表されているのでこの名前で呼ばれる。

定理 37 (Hanai-Morita, Stone). X を距離化可能空間とし, Y を位相空間とし $f: X \rightarrow Y$ は全射な連続閉写像であるとする。このとき以下は同値である。

- (1) Y は距離化可能である。
- (2) Y は第一可算である。
- (3) 任意の $y \in Y$ について $\text{Fr} f^{-1}(y)$ はコンパクトである。

証明. (1) $\implies$ (2) は自明である。そして定理 36 から (2) $\implies$ (3) が従う。距離空間の部分集合について可算コンパクトであることとコンパクトであることは同値であることに注意しよう。以下では (3) $\implies$ (1) を証明する。

写像 f は全射なので各 $y \in Y$ について $f^{\leftarrow}(y)$ は空ではない。そこで適当に点 $q_y \in f^{\leftarrow}(y)$ をとっておく。各 $y \in Y$ について X の開集合 O_y を以下のように定義する。

$$O_y = \begin{cases} \text{INT} f^{\leftarrow}(y) & \text{Fr} f^{\leftarrow}(y) \neq \emptyset \text{ のとき} \\ f^{\leftarrow}(y) \setminus \{p_y\} & \text{Fr} f^{\leftarrow}(y) = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで $\text{Fr} f^{\leftarrow}(y) = \emptyset$ のとき $f^{\leftarrow}(y)$ は開集合になっていることに注意しよう。一般に境界が空な集合は開集合である (閉集合でもある, つまり開かつ閉である)。そして

$O = \bigcup_{y \in Y} O_y$ として $L = X \setminus O$ と定義する. このとき L は X の閉集合である. そして写像 $g: L \rightarrow Y$ を $g = f|_L$ と定義する. 集合 L は X の閉部分集合であるから f が閉写像であることかたその制限である g も閉写像になっている. しかも L の定義から任意の $y \in Y$ について

$$g^{\leftarrow}(y) = \begin{cases} \text{Fr} f^{\leftarrow}(y) & \text{Fr} f^{\leftarrow}(y) \neq \emptyset \\ p_y & \text{Fr} f^{\leftarrow}(y) = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ. 写像 f に関する $\text{Fr} f^{\leftarrow}(y)$ がコンパクトという仮定より $g^{\leftarrow}(y)$ はコンパクトである. よって g は完全写像となる. つまり Y は完全写像 g による距離化可能空間 X の像なので, 定理 35 から Y も距離化可能である. これで証明が終わる. $\square$

注意. 上の花井-森田・ストーンの定理の以前に論文 [4] で花井は距離化可能空間の閉像が距離化可能であることを証明しているが, 証明に誤りがある. 点 $y \in Y$ について y を含む開集合 U に関して $X \setminus f^{\leftarrow}(U)$ を考えて, これと $f^{\leftarrow}(y)$ との距離を d としておりこれが正の数であることを用いて証明をしているが, 一般にこの d は 0 になりうるのでここで証明が破綻している. ここで距離化可能空間の閉像が距離化可能ではない例をあげよう. X を単位閉区間 $[0, 1]$ の無限個の位相的直和とする. そしてそれぞれの成分の 0 を一点に同一視した空間を Y とする. ようはハリネズミ空間である. このとき商写像 $f: X \rightarrow Y$ は閉写像となるが, Y は同一視された点において第一可算性を満たさないので特に距離化可能ではない. おそらくこの誤りを修正するのが花井-森田の論文だろうと思われるのでこの閉像に関する間違いは「発見的失敗」と見なすことができるだろう.

以下の定理は [1] によるものらしい.

系 38. X を距離化可能空間とし, Y を位相空間とする. もしも全射で閉写像かつ開写像であるような連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するならば Y も距離化可能である.

証明. このような状況において Y は第一可算であることがわかる. よって定理 37 から Y が距離化可能であることがわかる. $\square$

注意. 論文 [19] と論文 [23] では花井-森田・ストーンの定理 (定理 37) を証明する際に *Alexandroff-Urysohn-Tukey* のような被覆列を用いた距離化可能定理や, *Frink* による近傍系を用いた距離化可能定理を用いている. 長田の論文 [21] ではのちに *double sequence theorem* などと呼ばれることになる近傍系を用いた距離化可能定理から既存の距離化可能定理を証明しており, その中の一つに花井-森田・ストーンの定理 (定理 37) がある.

注意. 距離化可能定理については [12] や [2] も参照のこと.

8 完備距離化可能性

このセクションは説明不足である. 特にストーンチェックコンパクト化の話が説明不足である. 適当に参考文献で補ってほしい. このセクションでは完備距離化可能性が完全写像で保たれることを証明する. これは論文 [14] においてなんか知らんが Bing's shrinkability criterion の話の延長として証明されているようだ.

以下の事実は Willard の位相空間論の本 [25] の Theorem 24.13 である.

事実 39. 距離化可能空間 X が完備距離化可能であることと X のストーンチェックコンパクト化 βX の中で X が G_δ であることが同値である.

以下の命題の証明は [3] の Lemma 3.7.4 を参考にした.

命題 40. 位相空間 X と Y は完全正則であるとし, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は完全写像とする. このとき $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ が成り立つ. さらに f が全射ならば $\beta f(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ が成り立つ.

証明. 前半を示そう. 背理法を行う. いま $\beta f(\beta X \setminus X) \not\subset \beta Y \setminus Y$ と仮定する. するとある $z \in Y$ が存在して $\beta f^{-1}(z)$ が $\beta X \setminus X$ と交わりを持つ. その交わりから元 u を取ろう.

今から $Z = X \sqcup \{u\}$ とおきそして $g = \beta f|_Z$ とおく. すると f が完全写像であり Z は X に一点を付け加えただけなので g も完全写像になる. さらに $g(Z) \subset Y$ でもある.

また, Z の中で X は稠密である. つまり Z の中で X の閉包をとると u を含む.

以上の状況のもとで $g^{-1}(z) = f^{-1}(z) \sqcup \{u\}$ である. $u \notin X$ なので特に $u \notin f^{-1}(z)$ である. よって $f^{-1}(z)$ のコンパクト性から Z の開集合 U と V であって $u \in U$, $f^{-1}(z) \subset V$, そして $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. ここで $u \notin V$ なので V は X の開集合でもある. さらに $X \setminus V$ は X の閉集合である.

以上のことと f が閉写像であることから $f(X \setminus V)$ は Y の閉集合であり $f^{-1}(z) \cap V = \emptyset$ であるから $z \notin f(X \setminus V)$ である. ここで g は f の拡張であるから $g^{-1}(f(X \setminus V))$ は $X \setminus V$ を含む Z の閉集合であり, $z \notin f(X \setminus V)$ なので $g^{-1}(f(X \setminus V)) = f^{-1}(f(X \setminus V))$ である. よって $f^{-1}(f(X \setminus V)) \subset X$ から $\text{CL}_Z(X \setminus V) \subset X$ である.

ところで $U \cap V = \emptyset$ から $u \notin \text{CL}_Z(V)$ である. 故に $\text{CL}_Z(V) \subset X$ である. 以上のこ

とから $\text{CL}_Z(X \setminus V) \cup \text{CL}_Z(V) \subset X$ である.

また $X \subset (X \setminus V) \cup V \subset \text{CL}_Z(X \setminus V) \cup \text{CL}_Z(V)$ なので結局 $X = \text{CL}_Z(X \setminus V) \cup \text{CL}_Z(V)$ がわかる.

よって X は Z の閉集合となるが, これは $u \notin X$ という事実と, X が $Z (= X \sqcup \{u\})$ の中で稠密であるということに矛盾する. つまり $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ が成り立つ.

後半を示そう. 空間 Y は βY の中で稠密である. 今 f が全射つまり $f(X) = Y$ であるから $\beta f(\beta X)$ は稠密部分集合 Y を含むような βY の閉集合であるから (コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像), $\beta f(\beta X) = \beta Y$ である. そして前半の話から $\beta f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ である. もしもこれが真の包含だとすると $\beta f(\beta X) = \beta Y$ に矛盾するので $\beta f(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ が成り立つ. $\square$

以下の定理に関しては論文 [17] も参照のこと.

定理 41. 距離化可能空間 X は完備距離化可能とし, Y は位相空間で連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は完全写像とする. このとき Y も完備距離化可能である.

証明. 今から Y が βY の中で G_δ であることを証明する. 事実 39 から X は βX の中で G_δ である. つまり可算個の βX の開集合 $\{O_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して $X = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} O_n$ が成り立つ. さて $\beta f: \beta X \rightarrow \beta Y$ はコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像なので特に閉写像である. よって任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $(\beta f)_?(O_n)$ は βY の開集合になる (定理 27). ここで

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\beta f)_?(O_n) &= (\beta f)_? \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} O_n \right) = (\beta f)_?(X) = \beta Y \setminus f(\beta X \setminus X) \\ &= \beta Y \setminus (\beta Y \setminus Y) = Y \end{aligned}$$

なので (一般に小像は $\bigcap$ と可換になる, なぜなら順像は $\bigcup$ と可換だからである), 集合 Y は可算個の βY の開集合 $\{(\beta f)_?(O_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の共通部分でかける. 故に Y は βY の G_δ 集合である. 再び事実 39 から Y が完備距離化可能であることがわかる. $\square$

定理 42. 定理 37 と同じ記号を用いて同じ仮定をし, 定理 37 で述べられている三つの条件のいずれか一つ (結果として全て) が成り立つと仮定する. このときもしも X が完備距離化可能ならば Y も完備距離化可能である.

証明. 定理 37 の証明によれば Y は X の閉部分集合 L の完全像になる. 集合 L は完備距離化可能空間 X の閉集合であるから L 自体も完備距離化可能である. よって定理 41

から Y は完備距離化可能である.

□

参考文献

参考にしたウェブページ

[Dan Ma] Dan Ma's Topology Blog, *One way to find collectionwise normal spaces*, <https://dantopology.wordpress.com/2012/12/05/one-way-to-find-collectionwise-normal-spaces/>

[alg-d] alg-d の togetter まとめ「 f^{-1} と $\cup$, $\cap$ の交換と圏論について」
<https://togetter.com/li/966701>

[電波通信 1] はてなブログ電波通信の記事「点可算被覆と可算コンパクト性」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2016/12/29/214356>

[電波通信 2] はてなブログ電波通信の記事「閉写像云々とか固有写像とか」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/11/06/205115>

[電波通信 3] はてなブログ電波通信の記事「距離化可能定理 part -1:BNS」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2016/01/22/132906>

[電波通信 4] はてなブログ電波通信の記事「正規性の特徴付け」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/12/21/170610>

一般の参考文献

- [1] V. K. Balachandran, *A mapping theorem for metric spaces*, Duke Math. J. **22** (1955), 461–464, <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077466417>. MR 73157
- [2] D. Burke, R. Engelking, and D. Lutzer, *Hereditarily closure-preserving collections and metrization*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 483–488, DOI:10.2307/2040345. MR 370519
- [3] Ryszard Engelking, *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author. MR 1039321
- [4] Sitiro Hanai, *On closed mappings*, Proc. Japan Acad. **30** (1954), 285–288. MR 64390

- [5] ———, *On open and closed mappings*, Mem. Osaka Univ. Lib. Arts Ed. Ser. B **4** (1955), 51–55. MR 99024
- [6] ———, *On closed mappings. II*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 388–391. MR 80296
- [7] ———, *On open mappings*, Proc. Japan Acad. **33** (1957), 177–180. MR 90035
- [8] ———, *Inverse images of closed mappings. I*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 298–301. MR 139138
- [9] ———, *Inverse images of closed mappings. II*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 302–304. MR 139139
- [10] ———, *Inverse images of closed mappings. III*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 457–458. MR 138084
- [11] ———, *On open mappings. II*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 233–238. MR 126822
- [12] ———, *Open mappings and metrization theorems*, Proc. Japan Acad. **39** (1963), 450–454. MR 165490
- [13] Kiyoshi Iséki, *A note on normal spaces*, Math. Japon. **3** (1953), 45. MR 63018
- [14] A. Marin and Y. M. Visetti, *A general proof of Bing's shrinkability criterion*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), no. 2, 501–507, DOI:10.2307/2040043. MR 388319
- [15] E. Michael, *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 822–828, DOI:10.2307/2033306. MR 87079
- [16] ———, *A note on closed maps and compact sets*, Israel J. Math. **2** (1964), 173–176, DOI:10.1007/BF02759940. MR 177396
- [17] ———, *A note on completely metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 3, 513–522, DOI:10.2307/2046606. MR 822451
- [18] Ernest Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 831–838, DOI:10.2307/2032419. MR 56905
- [19] Kiiti Morita and Sitiro Hanai, *Closed mappings and metric spaces*, Proc. Japan Acad. **32** (1956), 10–14. MR 87077
- [20] Keiô Nagami, *Paracompactness and strong screenability*, Nagoya Math. J. **8** (1955), 83–88. MR 70148
- [21] Jun-iti Nagata, *A contribution to the theory of metrization*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **8** (1957), 185–192. MR 97789

- [22] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982, DOI:10.1090/S0002-9904-1948-09118-2. MR 26802
- [23] ———, *Metrizability of decomposition spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 690–700, DOI:10.2307/2033374. MR 87078
- [24] IA Vainstein, *On closed mappings of metric spaces*, Dokl. AN SSSR **57** (1947), 319–321.
- [25] Stephen Willard, *General topology*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA; MR0264581]. MR 2048350