

論文メモ

— ブラウン・モース・サードの定理 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 30 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

ここではときとしてブラウン・モース・サードの定理としても呼ばれるサードの定理についての論文を色々紹介する。

1 サードの定理まで

おそらくサードの定理の雛形になるのは関数の従属関係に関する研究であろう。とりあえずこの方面の研究は 1926 年のクノップとシュミットの共著である [25] にまで遡れると思う。この論文は日本語による解説もある [29]。しかしながらそれ以前からヤコビ行列式と関数それ自体の従属関係については研究があったようである。

1929 年の論文 [40] では任意の閉集合が何かしらの関数の臨界点 (critical point) 全体と一致するようにできることが書かれているらしい。この解説は [53] の注釈 3 による。

1929 年の論文 [54] も臨界点の話をしているがよくわからず。

1929 年の論文 [34] はモースの論文である。

1935 年の Brown の論文 [6] の Lemma 3. I. はサードの定理の原型だと思われる。

1939 年のモースの論文 [33] では、値域が $\mathbb{R}$ の場合のサードの定理の主張が書かれており、現在よりも大きな微分可能性を仮定した上でそれが成り立つことが述べられている。つまり G を $\mathbb{R}^n$ の開集合として $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ を r 階微分可能関数とするとき r が十分大きければ f の臨界値 (critical value) の値が測度ゼロであることが知られていたことを述べている。どれくらい大きければいいのかというとサードの未発表論文においては $r \leq n + (n - 3)^2/16$ であれば良いということが [33] の冒頭で述べられている。この論文の主定理としては上で述べた値域が $\mathbb{R}$ の場合には $r = m$ のときにも上の主張が正しいこ

とを証明している.

1942 年のサードの論文 [46] では今現在の知られている形でのサードの定理が証明されている. つまり G を $\mathbb{R}^m$ の開集合として $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^r 級の関数としたとき, もしも $r \geq \max\{m - n + 1, 1\}$ ならばその臨界値の測度がゼロであることを証明している. この論文ではモースの論文 [33] での補題が証明に用いられていることに注意しよう. ここら辺の事情がモース・サードの定理と呼ばれる所以だと思われる.

サードの 1958 年の論文 [47] では, サードの定理が本質的にハウスドルフ次元にまつわる現象であることが見抜かれている. 例えば f の定義域内の集合 A について f の rank が $< s$ となるならば $f(A)$ の s 次元ハウスドルフ測度は 0 になることなどが証明されている.

サードの 1965 年の論文 [49] では臨界点の像の話がバナッハ多様体の話へと拡張されている. この論文には修正 [48] があることに注意しよう.

2 サードの定理から

1966 年の Federer の論文 [14] は 1 ページしかない. そこでサードの定理の変種の話をしているのだが, 証明は有名な Federer の Geometric Measure Theory に入っていることを述べている. 論文というよりアナウンスというであろう.

1967 年の論文 [13] でも臨界値のハウスドルフ測度の話をしている.

1967 年の論文 [35] では普通に functional dependence の話をしている. 多分この話題について知りたければこの論文を読むと良いのではないだろうか.

1968 年の論文 [42] ではバナッハ空間上で定義されたフレドホルム作用素についての臨界値のハウスドルフ次元の話をしている. こういうフレドホルム作用素の話でサードの定理をやるのは Smale がやり始めたらしい (An infinite version of Sard's theorem).

1971 年の論文 [7] ではサードの定理の構成的証明 (constructive proof) を与えているらしい.

1983 年の論文 [55] はなぜだか知らないが, すごく面白そうな気がする. この論文を読むと何かいいことがあるような気がするがあんまり読めていない. ごめんね.

1986 年の論文 [36] ではなんか色々やっている. 多分サードの定理の証明読みたい時はこれを読むといいんじゃないかな.

1987 年の論文 [21] では C^∞ 関数に関するサードの定理に対して簡略化した関数を与えている. おそらく大抵の人が目にするサードの定理の証明はこの論文が元ネタなのではないだろうか? 違う可能性もある.

1991 年の論文 [43] では関数の変数を二つの部分に分けて片側では C^k でもう片側では C^ω のときのサードの定理を証明している.

1992 年の論文 [?] ではヘルダー連続性を混ぜた話をしている. 1993 年の論文 [?] はその続きである.

1993 年の論文 [3] では $C^{p,\alpha}$ 級関数についてのサードの定理が証明されている. $C^{p,\alpha}$ というのは p 階微分が局所 α 次ヘルダーということである.

1994 年の論文 [39] では微分可能性と Zygmund 関数を混ぜた関数についてのサードの定理を証明している. $C^{k+\text{Zygmund}}$ 級関数の話ということ. Zygmund はある種の微分可能性である.

1996 年の論文 [?] では実数直線のコンパクト部分集合が臨界値になるための条件を調べているようだ. 面白い論文だと思う.

2001 年の論文 [11] では $C^{k,\alpha}$ 級関数の臨界値のハウスドルフ次元の評価を行なっているようだ.

2004 年の論文 [22] では臨界値のより詳しいハウスドルフ次元の評価をしているようだ.

2006 年の論文 [27] では $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合として $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が $0 \notin \text{CLInt} Dv(\Omega)$ を満たすならば v の臨界値の測度がゼロになることを証明している. これが成り立つのはなんかすごいような気がする.

2009 年の論文 [32] では curve selection lemma というものを使ってサードの定理の証明を簡略化している. ただしこの curve selection lemma というのは o-minimal structure の理解がないと証明できなさそうである.

2015 年の論文 [1] では関数の微分に適切な条件を課すとサードの定理の仮定を少し緩められるという話をしているようだ.

2019 年の論文 [23] は論文 [32] の発展である. Bochnak–Łojasiewicz inequality の不等式というのがあってその一般化と見做せるいい不等式を使ってサードの定理を証明している. Bochnak–Łojasiewicz inequality は curve selection lemma というか o-minimal というか semi-analytic sets の話なのでなんかすごい難しい.

2021 年の論文 [30] はヘルダーを混ぜたサードの定理の話だと思う. 多分これを読むといいんじゃないかな.

3 サードの定理にまつわる反例

微分可能性が低い場合にはサードの定理が成り立たなかったりするがそのような例を構成した論文を紹介する.

サードの定理にまつわる最初の反例は Whitney の論文 [53] である。Whitney は自身の証明した有名な Whitney の拡張定理を用いて C^1 級関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ であってその臨界値が非退化な区間を含むものを構成している。注意すべきなのはサードの定理が証明される以前に Whitney は現在のサードの定理の仮定をギリギリ満たさない反例を構成しているということである。

1942 年の論文 [45] では連続で単調増加な特異関数を構成しているが、これは多分サードの定理に関係ないと思う。紛れていた。

1965 年の論文 [28] では無限次元多様体の間の写像に関するサードの定理の反例の話のようだ。

1979 年の論文 [24] では、 R_n を $\mathbb{R}^n$ の n 次元立方体としたときに C^1 級関数 $f: R_3 \rightarrow R_2$ であって、全射でなおかつ至る所の rank が ≤ 1 となるような例が構成されている。これはハーシュの「微分トポロジー」の演習問題に載っている未解決問題であった。またこれはサードの定理の仮定も満たさないし、結論も満たさない。

1985 年の論文 [17] では、カントール集合 C について $C + C = \{x + y \mid x, y \in C\} = [0, 2]$ という現象を用いてサードの定理の仮定を満たさないし結論も満たさない例を構成している。

1989 年の論文 [37] では quasi-arc が関数の臨界点になるための十分条件が考察されている。

1991 年の論文 [43] では関数の変数を二つの部分に分けて片側では C^k でもう片側では C^ω のときのサードの定理を証明しているということを上で紹介したが、論文 [38] では片側を C^∞ にすると Pugh の結果が成り立たないことを示しているらしい。

1993 年の論文 [2] では任意の可分バナッハ空間 E に対して全射 C^1 級関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ であってその微分のランクは至るところ ≤ 1 になっているものを構成している。これは Kaufman の論文 [24] の発展と見做せる。

1999 年の論文 [9] では Whitney arc というものを構成している。これはおそらく Whitney の論文 [53] に出てくるような arc のことだと思われる。

2003 年の論文 [19] では Assouad の埋め込み定理を用いて Whitney 型の例を構成している。

2008 年の論文 [10] も Whitney の例の話をしている。

2009 年の論文 [52] は Whitney の例を受け、連結集合が臨界点になるような特徴付けを発見したらしい。すごい。

2011 年の論文 [31] では滑らかなある曲線上で接微分が消えるような定数でない連続関数を構成しているようだ。

2020 年の論文 [16] は面白いと思う。 $\mathbb{S}^{n+1}$ から $\mathbb{S}^n$ への写像についてホモトピー的な考察とサード的な考察を行っており大変興味深いと思う。 ちょっと細かいところはわかんなかった。

4 サードの定理の系

1963 年の論文 [20] ではサードの定理を用いて n 次元単体 E についてその境界 ∂E は E のレトラクトではないことを証明している。 このことからブラウワーの不動点定理などを証明できる。

1975 年の論文 [51] では $K \subset \mathbb{R}^n$ として $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$ をリプシッツ写像として K のルベグ測度が有限としたときに $C = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{card}(f^{-1}(y)) = \infty\}$ がルベグ測度で測度 0 になることを述べている。 f が C^1 級の場合はこのことはサードの定理の系である。

5 サードの定理の変種

可微分ではなく他のいろいろな種類の関数についてのサードの定理の類似が色々証明されているようだ。

5.1 Delta-convex

2008 年の論文 [41] ではバナッハ空間の間の delta-convex 関数というクラスについて、定義域が $\mathbb{R}$ の区間の場合にはその臨界値の $1/2$ ハウスドルフ測度はゼロになることを証明している。

5.2 Borel

論文 [18] では Borel 写像に関するサードの定理のようなものを証明している。 サードの定理の系として $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ をいい感じに滑らかな関数としたときに $f^{-1}(y)$ が大体の y について $m - n$ 次元可微分多様体になっているというものがある。 この論文では適切な条件のもと、ボレル写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ について $f^{-1}(y)$ がほとんどの y についてハウスドルフ次元が $m - n$ 以下であることを示している。

5.3 ソボレフ

ソボレフ空間に属する関数についてのサードの定理に関する論文は以下の通りである。
[12](大元の論文?), [4], [15](simple proof?), [50], [5].

5.4 リーマン多様体の距離関数

論文 [44] はリーマン多様体の距離関数に関するサードの定理の話である。

5.5 よくわかんないやつ

多分サードの定理に関係するが、よくわからなかったやつ。 [8], [26].

以上の論文以外にも本当にたくさんのサードの定理に関係する論文があるとは思うがおそらくこれらの論文の参考文献やこれらの論文を引用している論文から全て見つけ出せるのではないだろうか。

参考文献

- [1] D. Azagra, J. Ferrera, and J. Gómez-Gil, *The Morse-Sard theorem revisited*, Q. J. Math. **69** (2018), no. 3, 887–913, DOI:10.1093/qmath/hay004. MR 3859213
- [2] S. M. Bates, *On smooth rank-1 mappings of Banach spaces onto the plane*, J. Differential Geom. **37** (1993), no. 3, 729–733. MR 1217168
- [3] ———, *Toward a precise smoothness hypothesis in Sard’s theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 1, 279–283, DOI:10.2307/2159728. MR 1112486
- [4] Bogdan Bojarski, Piotr Hajłasz, and Paweł Strzelecki, *Sard’s theorem for mappings in Hölder and Sobolev spaces*, Manuscripta Math. **118** (2005), no. 3, 383–397, DOI:10.1007/s00229-005-0590-1. MR 2183045
- [5] Jean Bourgain, Mikhail V. Korobkov, and Jan Kristensen, *On the Morse-Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$* , J. Reine Angew. Math. **700** (2015), 93–112, DOI:10.1515/crelle-2013-0002. MR 3318511
- [6] Arthur B. Brown, *Functional dependence*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 379–394, DOI:10.2307/1989688. MR 1501816
- [7] Yuen-kwok Chan, *A constructive proof of Sard’s theorem*, Pacific J. Math. **36**

- (1971), 291–301. MR 276988
- [8] P. T. Church, *Differentiable open maps on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 87–100, DOI:10.2307/1993648. MR 154296
 - [9] Marianna Csörnyei, *On Whitney pairs*, Fund. Math. **160** (1999), no. 1, 63–79, DOI:10.4064/fm-160-1-63-79. MR 1694403
 - [10] Marianna Csörnyei, Jan Kališ, and Luděk Zajíček, *Whitney arcs and 1-critical arcs*, Fund. Math. **199** (2008), no. 2, 119–130, DOI:10.4064/fm199-2-2. MR 2399495
 - [11] Carlos Gustavo T. de A. Moreira, *Hausdorff measures and the morse-sard theorem*, Publicacions Matemàtiques **45** (2001), no. 1, 149–162, <https://www.jstor.org/stable/43736715>.
 - [12] Luigi de Pascale, *The Morse-Sard theorem in Sobolev spaces*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 3, 1371–1386, DOI:10.1512/iumj.2001.50.1878. MR 1871360
 - [13] Abram Yakovlevich Dubovitskii, *Sets of points of degeneracy*, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya **31** (1967), no. 1, 27–36, DOI:<https://doi.org/10.1070/IM1967v001n01ABEH000545>.
 - [14] Herbert Federer, *Two theorems in geometric measure theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 719, DOI:10.1090/S0002-9904-1966-11567-7. MR 196033
 - [15] Alessio Figalli, *A simple proof of the Morse-Sard theorem in Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 10, 3675–3681, DOI:10.1090/S0002-9939-08-09321-0. MR 2415054
 - [16] Paweł Goldstein, Piotr Hajłasz, and Pekka Pankka, *Topologically nontrivial counterexamples to Sard’s theorem*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2020), no. 20, 7073–7096, DOI:10.1093/imrn/rny179. MR 4172678
 - [17] Eric L. Grinberg, *On the smoothness hypothesis in Sard’s theorem*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), no. 10, 733–734, DOI:10.2307/2323231. MR 820057
 - [18] Piotr Hajłasz, *A Sard type theorem for Borel mappings*, Colloq. Math. **67** (1994), no. 2, 217–221, DOI:10.4064/cm-67-2-217-221. MR 1305213
 - [19] ———, *Whitney’s example by way of Assouad’s embedding*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 11, 3463–3467, DOI:10.1090/S0002-9939-03-06913-2. MR 1991757
 - [20] Morris W. Hirsch, *A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 364–365, DOI:10.2307/2034644. MR 145502

- [21] Per Holm, *The theorem of Brown and Sard*, Enseign. Math. (2) **33** (1987), no. 3-4, 199–202. MR 925986
- [22] Hai-yi Jiang, *A general version of the morse-sard theorem*, Journal of Zhejiang University-SCIENCE A **5** (2004), no. 7, 754–758, DOI:<https://doi.org/10.1631/jzus.2004.0754>.
- [23] Xiaosong Kang, Xu Xu, and Dunmu Zhang, *The Morse criticality revisited and some new applications to the Morse-Sard theorem*, Manuscripta Math. **161** (2020), no. 3-4, 467–485, DOI:10.1007/s00229-019-01103-2. MR 4060490
- [24] R. Kaufman, *A singular map of a cube onto a square*, J. Differential Geometry **14** (1979), no. 4, 593–594. MR 600614
- [25] Konrad Knopp and Robert Schmidt, *Funktionaldeterminanten und abhängigkeit von funktionen*, Mathematische Zeitschrift **25** (1926), no. 1, 373–381, DOI:<https://doi.org/10.1007/BF01283845>.
- [26] M. V. Korobkov and E. Yu. Panov, *Necessary and sufficient conditions for a curve to be the gradient range of a C^1 -smooth function*, Sibirsk. Mat. Zh. **48** (2007), no. 4, 789–810, DOI:10.1007/s11202-007-0065-6. MR 2355374
- [27] M.V. Korobkov, *An analog of sard’s theorem for C^1 -smooth functions of two variables*, Sib Math J **47** (2006), 889–895, DOI:<https://doi.org/10.1007/s11202-006-0098-2>.
- [28] Ivan Kupka, *Counterexample to the Morse-Sard theorem in the case of infinite-dimensional manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 954–957, DOI:10.2307/2035591. MR 182024
- [29] クノップ K・ and シュミット R・, *函数行列式及び函数の従属関係*, 日本数学物理学会誌 **1** (1927), no. 2, 227–231, DOI:10.11429/subutsukaishi1927.1.227.
- [30] Andrew McLennan, *The generalized Morse-Sard theorem*, Expo. Math. **39** (2021), no. 4, 515–539, DOI:10.1016/j.exmath.2021.01.002. MR 4340761
- [31] Laurent Moonens, *Nonconstant continuous functions whose tangential derivative vanishes along a smooth curve*, Canad. Math. Bull. **54** (2011), no. 4, 706–715, DOI:10.4153/CMB-2011-027-1. MR 2894520
- [32] Carlos Gustavo Moreira and Maria Aparecida Soares Ruas, *The curve selection lemma and the Morse-Sard theorem*, Manuscripta Math. **129** (2009), no. 3, 401–408, DOI:10.1007/s00229-009-0275-2. MR 2515490
- [33] Anthony P. Morse, *The behavior of a function on its critical set*, Ann. of Math.

- (2) **40** (1939), no. 1, 62–70, DOI:10.2307/1968544. MR 1503449
- [34] Marston Morse, *The critical points of functions and the calculus of variations in the large*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1929), no. 1, 38–54, DOI:10.1090/S0002-9904-1929-04690-1. MR 1561686
- [35] W. F. Newns, *Functional dependence*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 911–920, DOI:10.2307/2315264. MR 220884
- [36] Alec Norton, *A critical set with nonnull image has large Hausdorff dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 1, 367–376, DOI:10.2307/2000579. MR 837817
- [37] ———, *Functions not constant on fractal quasi-arcs of critical points*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 2, 397–405, DOI:10.2307/2048819. MR 969524
- [38] ———, *A $C^{1 \times \infty}$ function with an interval of critical values*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), no. 4, 1483–1488, DOI:10.1512/iumj.1991.40.40067. MR 1142725
- [39] ———, *The Zygmund Morse-Sard theorem*, J. Geom. Anal. **4** (1994), no. 3, 403–424, DOI:10.1007/BF02921589. MR 1294335
- [40] M. A. Ostrowski, *Sur les multiplicités des zéros des fonctions indéfiniment dérivables de deux variables*, Bull. des Science Math. (1929), 64–72.
- [41] D. Pavlica, *Morse-Sard theorem for delta-convex curves*, Math. Bohem. **133** (2008), no. 4, 337–340. MR 2472482
- [42] SI Pohožaev, *The set of critical values of a functional*, Mathematics of the USSR-Sbornik **4** (1968), no. 1, 93, DOI:10.1070/SM1968v004n01ABEH002777.
- [43] Charles C. Pugh, *The Morse-Sard theorem with mixed differentiability*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), no. 4, 1387–1396, DOI:10.1512/iumj.1991.40.40062. MR 1142720
- [44] Ludovic Rifford, *A Morse-Sard theorem for the distance function on Riemannian manifolds*, Manuscripta Math. **113** (2004), no. 2, 251–265, DOI:10.1007/s00229-003-0436-7. MR 2128549
- [45] R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 427–439, DOI:10.2307/1990210. MR 7929
- [46] Arthur Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 883–890, DOI:10.1090/S0002-9904-1942-07811-6. MR 7523
- [47] ———, *Images of critical sets*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 247–259, DOI:10.2307/1970246. MR 100063

- [48] ———, *Errata to “Hausdorff measures of critical images on Banach manifolds”*, Amer. J. Math. **87** (1965), 760, DOI:10.2307/2373229. MR 180649
- [49] ———, *Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds*, Amer. J. Math. **87** (1965), 158–174, DOI:10.2307/2373229. MR 173748
- [50] Roberto van der Putten, *The Morse-Sard theorem for Sobolev spaces in a borderline case*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 4, 463–475, DOI:10.1016/j.bulsci.2010.02.001. MR 2923414
- [51] John C. Wells, *A note on a corollary of Sard’s theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 513–514, DOI:10.2307/2040294. MR 364578
- [52] Zhi-Ying Wen and Li-Feng Xi, *The geometry of Whitney’s critical sets*, Israel J. Math. **174** (2009), 303–348, DOI:10.1007/s11856-009-0116-8. MR 2581221
- [53] Hassler Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. **1** (1935), no. 4, 514–517, DOI:10.1215/S0012-7094-35-00138-7. MR 1545896
- [54] W. M. Whyburn, *Non-isolated critical points of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1929), no. 5, 701–708, DOI:10.1090/S0002-9904-1929-04806-7. MR 1561794
- [55] Y. Yomdin, *The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings*, Math. Ann. **264** (1983), no. 4, 495–515, DOI:10.1007/BF01456957. MR 716263