

論文メモ

— Noble? —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 30 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文は、位相空間 X について直積 X^m が任意の基数 m について正規ハウスドルフならば X はコンパクトハウスドルフという Noble の定理から発展した論文を集めた論文の束だと思う。この Noble の定理については電波通信でも紹介している (<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2016/07/06/223459>)。証明の方針としては、 X が一点ならば話は簡単なので X は 2 点以上含んでいるとしても良い。まず Stone の定理というのがあり、これはコンパクトでない距離空間 Z と非可算濃度 m については Z^m は正規ではないという定理である。ちなみにこの定理を使うと完全正則だが正規でない例がたくさん作れる。このことから、もしも位相空間 X について X^m が任意の基数 m について正規ならば X が可算コンパクトであることがわかる。これは背理法によって示される。 X に閉集合であるような可算離散空間 D が存在すると D^m は正規空間 X の閉部分空間なので正規でなければならないが、これは Stone の定理に矛盾というわけである。また森田の定理というのがありそれは $X \times \{0, 1\}^m$ が正規ならば X は m -パラコンパクトというものである。空間 X が 2 点以上で X^m がいつも正規ならばこの条件を満たすので X は任意の m について m -パラコンパクトである。つまりパラコンパクトである。さてパラコンパクトな可算コンパクト空間はコンパクトなので X はコンパクトハウスドルフである。

まあそれはさておき Noble の定理の簡単な証明に関するものは [2], [4], [7], [12] である。

論文 [11] は Noble 自身による論文で Stone の定理に関するものである。これは上の Noble の定理の萌芽だと思う。

Noble の原論文は [9] と [10] である。論文? [3] も参照のこと。

Noble の定理に関連する概念として $[a, b]$ -compactness がある. これは別に Noble の定理以前からあるやつだと思う. またこの概念は M. E. Rudin による Dowker space の構成にも関係ある. これに関連する論文は以下の通りである. [14], [8], [1], [6], [13], [5].

参考文献

- [1] George H. Butcher and James E. Joseph, *Characterizations of a generalized notion of compactness*, Journal of the Australian Mathematical Society **22** (1976), no. 3, 380–382, DOI:10.1017/S1446788700014828.
- [2] Ryszard Engelking, *An elementary proof of noble's theorem on normality of powers*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **29** (1988), no. 4, 677–678, <http://dml.cz/dmlcz/106683>.
- [3] Isidore Fleischer and S. P. Franklin, *On compactness and projections*, (1967), DOI:10.1184/R1/6478694.v1.
- [4] SP Franklin and RC Walker, *Normality of powers implies compactness*, Proceedings of the American Mathematical Society **36** (1972), no. 1, 295–296, DOI:10.2307/2039078.
- [5] IS Gál, *On the theory of (m, n) -compact topological spaces.*, Pacific J. Math. (1958), no. 4, 721–734, DOI:<http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1958.8.721>.
- [6] R.E. Hodel and J.E. Vaughan, *A note on $[a, b]$ -compactness*, General Topology and its Applications **4** (1974), no. 2, 179–189, DOI:[https://doi.org/10.1016/0016-660X\(74\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0016-660X(74)90020-8).
- [7] James Keesling, *Normality and infinite product spaces*, Advances in Math. **9** (1972), 90–92, DOI:[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(72\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0001-8708(72)90031-X).
- [8] Paolo Lipparini, *Compact factors in finally compact products of topological spaces*, Topology and its Applications **153** (2006), no. 9, 1365–1382, DOI:<https://doi.org/10.1016/j.topol.2005.04.002>.
- [9] N. Noble, *Products with closed projections*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 381–391, DOI:10.2307/1995144. MR 250261
- [10] ———, *Products with closed projections. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 169–183, DOI:10.2307/1995798. MR 283749
- [11] Norman Noble, *A generalization of a theorem of ah stone*, Archiv der Mathematik **18** (1967), 394–395, DOI:<https://doi.org/10.1007/BF01898831>.

- [12] L Polkowski, *On N. Noble's theorems concerning powers of spaces and mappings*, Colloq. Math. **2** (1979), no. 41, 215–217, DOI:10.4064/cm-41-2-215-217.
- [13] YOSHIFUMI SHIRAYAMA, *A note on $[a, b]^r$ -compactness and $[a, b]^r$ -refinability*, Scientiae Mathematicae Japonicae **65** (2007), no. 3, 431–438, DOI:https://doi.org/10.32219/isms.65.3_431.
- [14] J. Vaughan, *Some properties related to $[a, b]$ -compactness*, Fund. Math. **87** (1975), no. 3, 251–260 (eng), <http://eudml.org/doc/214803>.