

CW 複体のパラコンパクト性

ナンブ 電波通信 キトラ

2024 年 1 月 16 日

この文章では CW 複体のパラコンパクト性を証明したいところだが、難しいので、歴史というか文献案内と簡単に解説できる程度のことについてサクッと散文的補足を行う。ブログ記事 [電波通信 5] の書きなしとでもいいし、続きと思っても良い。

目次

1	歴史	1
2	散文的補足	3
2.1	Morita 弱位相の正規性	3
2.2	Adjunction space	5
2.3	弱位相が簡単な場合	6

1 歴史

CW 複体の概念自体は 1949 年の Whitehead の論文 [15] で与えられたものである。

それで CW 複体のパラコンパクト性の話題については、1951 年の Miyazaki の論文 [7] が一番古い論文だと思う。この論文 [7] では弱位相が入った単体的複体についてそれがパラコンパクトであることを示している。また論文中において、CW 複体がパラコンパクトかどうかわからないという旨の記述があるので、この当時の時点では CW 複体のパラコンパクト性はよく知られてなかったことが窺い知れる。

同じく 1951 年の Bourgin の論文論文 [1] でも単体的複体の弱位相はパラコンパクトであることが証明されている。

翌年 1952 年の Dugundji の論文 [3] でも単体的複体の弱位相がパラコンパクトであると

いうことを証明している.

単体的複体の位相については 1952 年の [2] も参照のこと.

翌年 1952 年の Miyazaki の論文 [8] ではとうとう CW 複体のパラコンパクト性が証明されている.

1953–54 にかけて発表された Morita(森田紀一) の二つの論文 [10] と [11] では一般にパラコンパクト空間列からの弱位相を備えた空間はパラコンパクトであることが証明されており, CW 複体のみならずもはや弱位相の一般論に昇華された. 詳しく見ていこう. 1953 年の Morita の論文 [10] では次のような弱位相の概念を考えている. 位相空間 X がその閉集合の族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ に関する **Morita 弱位相を備えている**とは, 以下の条件を満たすときにいう.

- (1) この族の任意の部分族の和集合は閉集合である.
- (2) X の部分集合 U が X の開集合であることと, 任意の α について $U \cap A_\alpha$ が A_α の開集合であることは同値である

普通は (2) の条件さえ満たせば弱位相と呼ぶので Morita は条件 (1) の分だけ普通より強いものを考えている.

このセッティングのもとで Morita は各 A_α が距離化可能空間であれば X それ自体はパラコンパクトハウスドルフであることを示している. 翌年 1954 年の Morita の論文 [11] は上の論文 [10] の続きであるが, この中で Morita は各 A_α がパラコンパクトハウスドルフであることと X それ自体もパラコンパクトハウスドルフが同値というふうに弱位相とパラコンパクト性の関係を改良して証明した. さらに, 完全正規性, 可算パラコンパクト性, 遺伝的パラコンパクトや遺伝的完全正規なども調べられている.

また X が $\{A_\alpha\}$ からの Morita の弱位相を備えているときに任意の局所コンパクトハウスドルフ空間 W について $X \times W$ は $\{A_\alpha \times W\}$ からの Morita 弱位相を備えていることが [10] で証明されているし (商写像と局所コンパクトハウスドルフの直積が商写像であるというような現象自体は 1948 年の [14, Lemma 4] でも観察されていた), Morita 弱位相では正規性が被覆から全体に伝播することも証明されている. このことと玉野の定理から X がパラコンパクトであることが示される.

ここで注意だが玉野の定理とは完全正則空間 X が完全正則であるための必要十分条件が, 任意のコンパクトハウスドルフ空間 K との直積空間 $X \times K$ が常に正規であることを主張する定理である. この定理が証明されたのは 1960 年であるから, 時間の隔たりを考えるに Morita の論文では使いようがなかったことにさらに注意しよう. 玉野の定理は [電波通信 4] でも紹介している.

Morita の弱位相は次の意味で閉写像の一般化と見做せる．空間 X が $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ に関する弱位相を持つことは次の写像から定まる商位相を X が備えていることと同値である．

$$p: \coprod_{\alpha \in I} A_\alpha \rightarrow X$$

ここで左辺は位相空間の直和である．Morita の弱位相の条件は任意の部分集合 $J \subset I$ について $p(\coprod_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ が X の閉集合となることを主張している．

しかし一般には p は閉写像とは限らない．例えば $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$ を考えるとこれは $\{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ から誘導される Morita の弱位相を持つが，各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について $S_n = [2^{-n}, 1 - 2^{-n}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ を考えると $\coprod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} S_n$ は $\coprod_n \mathbb{R}^n$ のなかの閉集合であるがその像は $(0, 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^\infty$ となり閉集合ではない．無限次元の射影空間や球面でも同様のので，たとえ X_n がコンパクトというすごい綺麗な空間でもこの Morita の弱位相の空間へ都合のいい空間から閉写像が伸びることはあまり期待できそうにない．

ただし， $\{A_\alpha\}$ が局所有限な閉集合の族であれば上の商写像 p は閉写像になっており，単純化された状況においては閉写像が現れるという意味で Morita の弱位相は閉写像による商位相の一般化と見做せる．

1957 年の Michael の定理 [5] によればパラコンパクト空間の閉写像による像はパラコンパクトである．Michael の論文以前にある意味で閉写像によるパラコンパクト性の保存のような現象を発見したのは大変興味深いと思う．ちなみに以上の論文はほとんど全てオープンアクセスだったと思うのでご家庭のインターネットでご覧できると思う．

2 散文的補足

2.1 Morita 弱位相の正規性

Morita 弱位相が正規性を反映するという議論を紹介する．

定理 1. 位相空間 X は閉集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ から誘導される Morita 弱位相を備えているとする．このときもしも各 A_i が正規ハウスドルフならば X もそうである．

証明． X は $\{A_i\}_{i \in I}$ から誘導される弱位相を備えているので，特に T_1 ，つまり一点が閉集合であることがわかる．今からは X 上で Tietze–Urysohn の補題が成立することを示して X の正規性を証明する（正規性と Tietze–Urysohn の補題の同値性についてはブログ記事 [電波通信 1] でも紹介している）．つまり X の閉集合 F とその上の連続関数 $h: F \rightarrow [0, 1]$ を任意に与えたときに連続関数 $H: X \rightarrow [0, 1]$ であって $H|_F = h$ となるも

のを構成する．今 I は基数 κ と等しいとしても良い．超限帰納法を使って以下のような連続関数の族 $h_\alpha: \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup F \rightarrow [0, 1]$ を構成する：

1. 各 h_α は連続である．
2. $\alpha < \beta$ のとき h_β は h_α の拡張となっている．

今 $\gamma \leq \kappa$ を与えて $\alpha < \gamma$ となる α については上のような h_α は構成できているとしよう．もしも γ が極限順序数のときは $h_\gamma: \bigcup_{\beta < \gamma} A_\beta \cup F \rightarrow [0, 1]$ を $\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ 上では h_α として定義するとうまく貼り合わされて h_γ は well-defined となる．このような写像の連続性は X が $\{A_i\}$ からの弱位相を備えていることから従う．もしも γ が後続順序数、つまり $\gamma = \alpha + 1$ と書かれるときには以下のようにする．連続写像 $h_\alpha: \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup F \rightarrow [0, 1]$ はすでに構成されているわけだから、これをうまく使う．Morita 弱位相の (1) から $\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup F$ は X の閉集合である．よって $A_\gamma \cap \left(\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup F\right)$ は A_γ の閉集合である． A_γ の正規性を用いて $h_\alpha|_{A_\gamma \cap \left(\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta \cup F\right)}$ を A_γ 全体に拡張しそれを g_γ とする．このとき $h_\gamma: \bigcup_{\beta < \gamma} A_\beta \cup F \rightarrow [0, 1]$ を A_α 上では g_γ としそれ以外では h_α とするとうまく貼り合わされて連続写像となる．

以上から κ まで h_α を構成できて、 $H = h_\kappa$ とするとそれは h の拡張となっている．以上で X の正規性がわかった． $\square$

この定理と玉野の定理、そしてコンパクト空間との直積で Morita 弱位相が崩れないという話からパラコンパクト性が伝播するという話も従う．上の議論ではゼロ集合を保存できるように拡大できるので、完全正規性 (T_6) も伝播されることも従う (ゼロ集合と完全正規性の話はブログ記事 [電波通信 2] でも紹介した)．

ちなみに Morita 弱位相を備えた空間の開集合も Morita 弱位相を備えているので、遺伝的正規性 (T_5) や遺伝的パラコンパクト性も伝播することがわかる (開集合と遺伝的正規の話はブログ記事 [電波通信 2] でも紹介した)．

ちなみにある種の写像を拡張するという性質とパラコンパクト性が同値なので、上の写像を拡張する議論でパラコンパクト性が証明できたりする．Michael の連続選択子の理論である．Michael の論文 [6] などを参照のこと．ブログ記事 [トポいろ] にもその方向性の議論による CW 複体のパラコンパクト性の証明が載っている．ウェブページ [Minazumi] にもこの方針での証明が紹介されている．

2.2 Adjunction space

定義 2 (Adjunction space). $\{H_i\}_{i \in I}$ を位相空間の族とし, A_i を H_i の閉集合とする. さらに Y を位相空間とし, $g_i: A_i \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき直和空間 $W = Y \sqcup \coprod_{i \in I} H_i$ を考えてこの上の同値関係 $\sim$ を $x \in A_i$ と $y \in Y$ については $x \sim y$ を $g_i(x) = y$ で $x \in A_i$ と $y \in A_j$ については $g_i(x) = g_j(x)$ と定義し, 上記以外については自明な同値関係になっているとする. このとき商空間 $Z = W / \sim$ を $\{H_i\}$ を g_i で Y に貼り合わせた *adjunction space* という. このとき商写像を $p: W \rightarrow Z$ と書くことにする.

1962 年の Tsuda の論文 [13] では次の二つの補題が証明されている. 証明は省略する.

補題 3. 記号は定義 2 と同じとする. このときさらに各 $g_i: A_i \rightarrow Y$ を閉写像であると仮定する. このとき $\tilde{g}_i: H_i \rightarrow Z$ を $H_i \subset W$ と考えたときに $\tilde{g}_i = p|_{H_i}$ 定義する. さらに $\tilde{g}: Y \rightarrow Z$ を $Y \subset W$ と考えたときに $\tilde{g} = p|_Y$ とする. このとき各 $\tilde{g}_i$ と $\tilde{g}$ は閉写像であり, さらに $\tilde{g}$ は位相的埋め込みである.

補題 4. 補題 3 と同じ記号を使う. このとき族 $\{\tilde{g}_i(H_i) \cup \tilde{g}(Y) \mid i \in I\}$ は Z の閉被覆であり, さらに Z の位相はこの族に関する *Morita* 弱位相と一致する.

注意. 空間 Z の位相は族 $\{\tilde{g}(Y)\} \cup \{\tilde{g}_i(H_i) \mid i \in I\}$ から誘導される通常の意味での弱位相と同じである. *Morita* 弱位相の (1) の条件を満たすようにするために $\tilde{g}_i(H_i) \cup \tilde{g}(Y)$ のようにしていると思われる. 一般に $\{\tilde{g}_i(H_i) \mid i \in I\}$ の部分族の和は Z の閉集合とは限らないのだ.

CW 複体の n 次スケルトン X_n は $n-1$ 次スケルトン X_{n-1} から n 次元 cell D^n を貼り合わせる adjunction space として得ることができる. このことは [4, Theorem 2.4, p.47] を参照のこと.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_n} \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & \coprod_{i \in I_n} \mathbb{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n-1} & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

ここで $\mathbb{S}^{n-1}$ はコンパクト距離空間なのでその上の連続写像は常に閉写像である. さらに $\mathbb{D}^n$ はコンパクト距離化可能空間である. コンパクト距離化可能空間のハウスドルフ空間への連続像が再びコンパクト距離化可能ということ (この定理は [電波通信 3] でも紹介し

ている) から X_n のなかの $\mathbb{D}^n$ の像はコンパクト距離化可能空間である. よって X_{n-1} がパラコンパクトならば上での議論から X_n がパラコンパクトであることがわかる. CW 複体は $X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ から誘導される通常の意味での弱位相を備えている. このことは [4, Theorem 2.4, p.47] を参照のこと. 一般に可算でなおかつ包含について増大な閉集合の族による弱位相は Morita 弱位相になる. なぜならその部分族の和は有限和か無限和しかないが, 有限和は当たり前だが閉集合であり, 無限和については, この X_n の族が増大という条件から全体空間に一致するので (1) は満たされる.

よって以上のことから X_{-1} がパラコンパクトであれば全体空間の CW 複体はパラコンパクトである.

以上の議論は X_{-1} が空である必要は全くないので, 相対 CW 複体でも同じ議論が成立する.

2.3 弱位相が簡単な場合

空間 X が可算個の閉集合の包含列 $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ からの弱位相を持ち, なおかつ各 X_n が σ コンパクトでパラコンパクトハウスドルフのとき X がパラコンパクトであることの簡単な証明を紹介する. このような状況はファイバー束の理論を勉強するにあたって結構多いと思うので便利だと思う.

位相空間の被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ が**星型有限**であるとは任意の $i \in I$ について $|\{a \in I \mid U_i \cap U_a \neq \emptyset\}| < \infty$ を満たすときにいう. つまり被覆それぞれが局所有限性を担保してくれるような被覆ということである位相空間が**強パラコンパクト**とはその任意の開被覆について, 開集合からなる星型有限な細分が存在するときにいう. 星型有限であれば局所有限なので, 強パラコンパクトならばもちろんパラコンパクトである.

補題 5. X を位相空間とし, $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ をその開被覆とする. また, 別の開被覆 $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と整数 M と整数列 N_i が存在して以下を満たすとする.

- (1) $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が $|i - j| \geq M$ を満たすならば $H_i \cap H_j = \emptyset$ である.
- (2) 任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $H_i \subset \bigcup_{a=0}^{N_i} U_a$ である.

このとき集合族 $\{H_i \cap U_a \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in \{0, \dots, N_i\}\}$ は $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ の星型有限な細分であるような開集合からなる X の被覆である.

証明. $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ で $\mathcal{R} = \{H_i \cap U_a \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in \{0, \dots, N_i\}\}$ とおく. このとき $\mathcal{R}$ が $\mathcal{C}$ の細分であることは定義から直ちに従う. また開被覆であることもすぐわかる.

次は $\mathcal{R}$ が X の被覆であることを示そう。点 $x \in X$ を任意にとる。このとき $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が被覆という仮定から $x \in H_i$ となる $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。そして条件 (2) からある $a \in \{0, \dots, N_i\}$ が存在して $x \in U_a$ となる。つまり $x \in H_i \cap U_a$ である。よって $\mathcal{R}$ が被覆であることがわかった。最後に $\mathcal{R}$ の星型有限性を示そう。任意に $H_i \cap U_a$ をとる。ここで $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $a \in \{0, \dots, N_i\}$ である。このとき条件 (1) から $H_j \cap U_b$ が $H_i \cap U_a$ と交わりを持つならば $|i - j| < M$ でなければならない。よって $\mathcal{R}$ の定義から交わりを持つような添字 (j, b) は $j \in (i - M, i + M) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $b \in \{0, \dots, N_{i+M}\}$ を満たす。二つの集合 $(i - M, i + M) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{i - M + 1, \dots, i, \dots, i + M - 1\}$ と $\{0, \dots, N_{i+M}\}$ は有限集合なので $\mathcal{R}$ の星型有限性がわかった。 $\square$

以下は Morita の論文 [9, Theorem 3] の結果である。

定理 6. 位相空間 X はリンデレフでなおかつ正規ハウスドルフであるとする。このとき X は強パラコンパクトである。

証明. X の任意の開被覆 $\{G_a\}_{a \in A}$ に対して星型有限な細分が存在することを示せば良い。各 $a \in A$ と各点 $x \in G_a$ についてウリゾーンの補題を用いて連続関数 $f_{x,a}: X \rightarrow [0, 1]$ で $f_{x,a}(x) = 1$ で $X \setminus G_a$ では 0 になるようなものが存在する。ここで被覆 $\{f_{x,a}^{-1}((0, 1])\}_{x \in X, a \in A}$ は $\{G_a\}$ の細分となっている。よって $\{f_{x,a}^{-1}((0, 1])\}_{x \in X, a \in A}$ に星型有限な細分が存在することを示せばよい。今 X はリンデレフなので適当にこの開被覆から可算無限な部分族をとって X の開被覆となるようにできる。それを $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と書くことにしよう。このとき定義からして各 i について $f_i: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して $U_i = f_i^{-1}((0, 1])$ となることに注意しよう。

今から補題 5 を用いて $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に星型有限な細分が存在することを示す。各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $G(i, a)$ を

$$G(i, a) = f_i^{-1}((2^{-a}, 1])$$

と定義すると、任意の i と a について

$$\text{CL}(G(i, a)) \subset G(i, a + 1)$$

であり、

$$G(i, a) \subset U_i$$

であることに注意しよう。また

$$U_i = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} G(i, a)$$

に注意すると族 $\{G(i, a)\}_{i, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は X の開被覆になっていることに注意しよう。さて、各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$S_n = \bigcup_{k=0}^n G(k, n)$$

と定義すると S_n は開集合であり、以下を満たす。

(1) 任意の n について

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} S_n = X$$

(2) $m < n$ ならば

$$\text{CL}(S_m) \subset S_n$$

(3) 任意の n について

$$S_n \subset \bigcup_{k=0}^n U_k$$

そこで今から族 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を以下のように定義する。

$$H_0 = S_0$$

$$H_1 = S_1$$

として $n \geq 2$ のとき H_n を

$$H_n = S_{n+1} \setminus \text{CL}(S_{n-1})$$

と定義する。もちろん H_n は開集合である。ここで族 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が被覆であることを証明する。任意の $x \in X$ に対して $x \in \text{CL}(S_n)$ となる最小の n をとる。ここで $n = 0, 1$ の時は $x \in H_0 \cup H_1$ となることがわかるので（というか実は $H_0 = \emptyset$ なので $n = 0$ の場合は発生しない）、我々は $n \geq 2$ と仮定してもよい。さて n の最小性から $x \notin \text{CL}(S_{n-1})$ であり、また $x \in \text{CL}(S_n) \subset S_{n+1}$ なので $x \in S_{n+1} \setminus \text{CL}(S_{n-1}) = H_n$ がわかる。結局 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は被覆であることがわかる。

さて $H_n \subset S_n$ から次のことがわかる。

(1) $2 \leq |m - n|$ ならば $H_n \cap H_m = \emptyset$ である。

(2) 任意の n について

$$H_n \subset \bigcup_{k=0}^n U_k$$

よって $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は補題 5 の条件を満たすので、被覆 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に星型有限な細分が存在することがわかった。□

注意. 上の証明は、「多様体の基礎」などに載っている σ コンパクトな局所コンパクトハウスドルフ空間がパラコンパクトであるという証明の一般化になっている。また、コゼロ被覆で細分するといいいことがあるという「児玉・永見」に流れる考えの実践になっている。また、上の H_n の構成はドーナツを思い浮かべると良いだろう。

定理 7. X は閉集合の包含列 $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ から誘導される (普通の意味の) 弱位相を備えているとする。さらに各 X_n は σ コンパクトで正規であるとする。このとき X はパラコンパクトである。実は強パラコンパクトということもわかる。

証明. 定理 1 と同様に X の正規ハウスドルフ性が従う。各 X_n が σ コンパクトなので空間 X 自体も σ コンパクトであることがわかる。特に X はリンデレフである。よってリンデレフ正規空間がパラコンパクトであることを示せば良い。それは定理 6 で既に示されている。強パラコンパクトもわかる。□

注意. 一般に X は閉集合の包含列 $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ から誘導される (普通の意味の) 弱位相を備えているとするときに各 X_n がリンデレフ正則ならば X それ自体もリンデレフ正則であることが従う。証明の方針としては、まず正則リンデレフならば正規なので X の正規性がわかる。そして正規空間においてはリンデレフ性と任意の開被覆に閉集合からなる可算な被覆が存在することが同値なので (パラコンパクト性と閉収縮を用いる) 包含列が可算であることなどを使うとわかる。なので定理 7 の σ コンパクトの仮定はリンデレフでも良い。しかしながらそもそも Morita 弱位相の話があるので、こんな細々としたバリエーションを考える必要はないのだけれども。

参考文献

参考にしたウェブページ

[トポいろ] トポロジーいろいろの記事「パラコンパクト PDF」

<https://yamyamtopo.wordpress.com/2015/12/19/%e3%83%91%e3%83%a9%e3%82%b3%e3%83%b3%e3%83%91%e3%82%af%e3%83%88%e6%80%a7-pdf/>

- [Minazumi] みなずみ氏のウェブページの数学ノート位相幾何学命題 2.4.33, 2024 年 1 月 12 日閲覧, <https://minazumi.com/math/note/tgy/ch02sec04.html>
- [電波通信 1] はてなブログ電波通信の記事「等高線と連続関数：ウリゾーンの補題とティーチェの拡張定理：正規空間その (-1)(修正あり)」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2016/01/31/205017>
- [電波通信 2] はてなブログ電波通信の記事「遺伝的正规とか完全正规」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/12/21/170256>
- [電波通信 3] はてなブログ電波通信の記事「閉写像云々とか固有写像とか」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/11/06/205115>
- [電波通信 4] はてなブログ電波通信の記事「パラコンパクト性など：アドベントカレンダー 2015」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/12/11/205721>
- [電波通信 5] はてなブログ電波通信の記事「未完成（接着、帰納極限、CW 複体）」
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/12/23/211121>

一般の参考文献

- [1] D. G. Bourgin, *The paracompactness of the weak simplicial complex*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), 305–313, DOI:10.1073/pnas.38.4.305. MR 48794
- [2] Clifford H Dowker, *Topology of metric complexes*, American Journal of Mathematics **74** (1952), no. 3, 555–577, DOI:10.2307/2372262.
- [3] J. Dugundji, *Note on CW polytopes*, Portugal. Math. **11** (1952), 7–10. MR 48821
- [4] Albert T. Lundell and Stephen Weingram, *The topology of CW complexes*, The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969, DOI:10.1007/978-1-4684-6254-8. MR 3822092
- [5] E. Michael, *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 822–828, DOI:10.2307/2033306. MR 87079
- [6] Ernest Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 361–382, DOI:10.2307/1969615. MR 77107
- [7] Hiroshi Miyazaki, *A note on paracompact spaces*, Tohoku Math. J. (2) **4** (1952), 88–92, DOI:10.2748/tmj/1178245452. MR 48793
- [8] ———, *The paracompactness of CW-complexes*, Tohoku Math. J. (2) **4** (1952), 309–313, DOI:10.2748/tmj/1178245380. MR 54246

- [9] Kiiti Morita, *Star-finite coverings and the star-finite property*, Math. Japon. **1** (1948), 60–68. MR 26803
- [10] ———, *On spaces having the weak topology with respect to closed coverings*, Proc. Japan Acad. **29** (1953), 537–543. MR 62423
- [11] ———, *On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. II*, Proc. Japan Acad. **30** (1954), 711–717. MR 69478
- [12] Hisahiro Tamano, *On paracompactness*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1043–1047. MR 124876
- [13] Mitsuru Tsuda, *On adjunction spaces*, Proc. Japan Acad. **38** (1962), 23–26. MR 140085
- [14] J. H. C. Whitehead, *Note on a theorem due to Borsuk*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 1125–1132, DOI:10.1090/S0002-9904-1948-09138-8. MR 29503
- [15] ———, *Combinatorial homotopy. I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213–245, DOI:10.1090/S0002-9904-1949-09175-9. MR 30759