

論文メモ

— n -cardinality —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 9 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文は以下のような空間の構成にまつわる論文を集めたものだと思う：

定理 1. 性質 $\mathcal{P}$ をパラコンパクト、リンデレフ、サブパラコンパクトのどれか一つとする。そして性質 $\mathcal{Q}$ は正規か族正規のいずれかとする。そして k, m を $1 \leq m \leq k \leq \aleph_0$ を満たすものとして任意にとる。すると以下の性質を満たす可分で第一可算な位相空間 X が存在する。

- (1) X^n が性質 $\mathcal{P}$ を満たすことと $n < k$ は同値である；
- (2) X^n が性質 $\mathcal{Q}$ を満たすことと $n < m$ は同値である。

この定理の証明は [8] にある。論文 [5] もそういう話。これにまつわる論文を集めたというか、大体 Przymusiński の論文である。

正規性は直積では保たれない。例えばゾルゲンフライ直線などがシンプルな例になっている。パラコンパクト性やリンデレフもそうである。上記の定理はそれではそれらの直積で保たれない性質が消えるような臨界的な直積の回数はなんであるかという疑問に答えるものである。いくらでも任意にいじけるとというのが上記の定理の答えである。

さてこの定理の空間の構成をちゃんと追っかけたわけではないが、空間の構成には n -cardinality というものを用いる。これを紹介したい。

集合 X に対して自然数 n 回の直積 X^n を考える。このとき点 $p = (p_1, \dots, p_n) \in X^n$ に対して

$$\hat{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

というふうに X の部分集合 $\hat{p}$ を対応させる。例えば p が対角線に入っているなら $\hat{p}$ は一点集合になることに注意しよう。このとき以下が成り立つ。

命題 2 ([6]). X を集合で n を自然数とする. このとき A を X^n の部分集合として以下の三つの量はどれか一つが無限になるのであれば三つの値は一致する.

- (1) $\max\{|B| \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合で } B \text{ から異なる } 2 \text{ 元 } p, q \text{ をとると常に } p_i \neq q_i \text{ になる. }\};$
- (2) $\max\{|B| \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合で } B \text{ から異なる } 2 \text{ 元 } p, q \text{ をとると常に } \hat{p} \cap \hat{q} = \emptyset \text{ になる. }\};$
- (3) $\max\{|Y| \mid Y \text{ は } X \text{ の部分集合で } A \subset \bigcup_{i=1}^n (X^{i-1} \times Y \times X^{n-i}) \text{ を満たす. }\}$

ここで $|B|$ などは B の濃度を表す.

上の命題の二番で定義される量を A の n -cardinality とよび $|A|_n$ と書くことにする. A が n -countable であるとは $|A|_n \leq \aleph_0$ であることとし, そうでない時には n -uncountable と呼ぶ. つまり n -cardinality とは, A の点の集合であって座標がダブらないような最大の A の部分集合であるということである.

この概念が先に述べた定理でどのように使われるのかは説明できないけれども, とにかく大事なのは n -cardinality に対してもボレル集合の完全集合性質は成り立つということである. 以下が成り立つ.

定理 3 ([6]). X をポーランド空間とし n を自然数とする. そして B を X^n のボレル集合とする. このとき以下は同値である.

- (1) B は n -uncountable である.
- (2) $|B|_n = 2^{\aleph_0}$
- (3) C をカントール集合とする. 位相的埋め込み写像 $h: C \rightarrow B$ が存在して $\widehat{h(x)} \cap \widehat{h(y)} = \emptyset$ を任意の $x, y \in C$ でみたす.
- (4) C をカントール集合とする. このとき位相的埋め込み写像の族 $\{h_i: C \rightarrow X\}_{i=1}^n$ が存在し, さらに $h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$ で定義される位相的埋め込み写像 $h: C \rightarrow X^n$ に関して $h(C) \subset B$ となる.
- (5) その他いろいろ

n -cardinality でも完全集合性質が満たされることは面白いと思う. また比較的新しい次元論の数学書 [1] にも n -cardinality が載っている.

参考文献

- [1] Michael G. Charalambous, *Dimension theory*, Atlantis Studies in Mathematics, vol. 7, Springer, Cham, 2019, A selection of theorems and counterexamples,

DOI:10.1007/978-3-030-22232-1. MR 3970309

- [2] Peg Daniels, ω^ω -directedness and a question of E. Michael, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **36** (1995), no. 1, 115–121. MR 1334419
- [3] Ernest A. Michael, *Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products*, *Compositio Math.* **23** (1971), 199–214. MR 287502
- [4] T. Przymusiński, *A Lindelöf space X such that X^2 is normal but not paracompact*, *Fund. Math.* **78** (1973), no. 3, 291–296, DOI:10.4064/fm-78-3-291-296. MR 321007
- [5] Teodor C. Przymusiński, *Topological properties of product spaces and the notion of n -cardinality*, *Topology Proc.* **2** (1977), no. 1, 233–241. MR 540608
- [6] ———, *On the notion of n -cardinality*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **69** (1978), no. 2, 333–338, DOI:10.2307/2042622. MR 491191
- [7] ———, *On the dimension of product spaces and an example of M. Wage*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **76** (1979), no. 2, 315–321, DOI:10.2307/2043012. MR 537097
- [8] ———, *Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products*, *Fund. Math.* **105** (1979/80), no. 2, 87–104, DOI:10.4064/fm-105-2-87-104. MR 561584
- [9] ———, *Products of perfectly normal spaces*, *Fund. Math.* **108** (1980), no. 2, 129–136, DOI:10.4064/fm-108-2-129-136. MR 594312
- [10] Stevo Todorčević, *Remarks on chain conditions in products*, *Compositio Math.* **55** (1985), no. 3, 295–302. MR 799818
- [11] ———, *Remarks on cellularity in products*, *Compositio Math.* **57** (1986), no. 3, 357–372. MR 829326