

論文メモ

— エルデシュ的な話：普遍空間？ —

ナンブ キトラ

2023 年 12 月 20 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

普遍空間の話だと思う。

性質 (S_n) というのはある η_n が存在して $\mathbb{R}$ の n 個の点で直径が η_n より小さいものを与えたときにその並行移動を含むという性質である。

論文^{MR0089886}[5]においてエルデシュと角谷は次のような $\mathbb{R}$ の部分集合 S を構成した。1. S は完全集合、2. $\mathbb{R}$ の有限集合 F を与えると、適当な正の実数 r と実数 $t \in \mathbb{R}$ が存在して $F + t \subset S$ となる (任意の n について性質 (S_n) を満たす。)。つまり、 $\mathbb{R}$ の全ての有限部分集合を拡大縮小並行移動を通して全て知っている完全集合が S である。詳しい話は^{plewik2003set}[12]にも載っている。論文^{MR0112938}[4]もなんかこういう話で性質 (S_n) 以外の並行移動に関する性質を持つような実数の部分集合を構成している。

論文^{MR2431353}[10]は逆に与えられたパターンを含まないようなハウスドルフ次元 1 の実数の部分空間の構成である。

論文^{MR0366673}[3]は何か色々参考文献があって面白いような気がするが何やってんのかよくわからなかった。多分ちゃんと読むといい気がする。カントール集合が性質 S_3 を満たさない理由を説明しているらしい。

論文^{MR1417342}[2]ではシュタインハウス性質について研究してシュタインハウス性質をもつ集合はない点を持たないこととか閉集合でないことを証明しているようだ。ちょっと論文の書き方が訳わからんのだが、平面の部分集合がシュタインハウス性質を持つとは多分、どんなに並行移動させたり回転させても $\mathbb{Z}^2$ との共通部分が必ず一点集合になることだと思うけど自信はない。

参考文献

- MR3701663 [1] Victoriia Bilet, Oleksiy Dovgoshey, Mehmet Küçükaslan, and Evgenii Petrov, *Minimal universal metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), no. 2, 1019–1064, DOI:10.5186/aasfm.2017.4261. MR 3701663
- MR1417342 [2] Mihai Ciucu, *A remark on sets having the Steinhaus property*, Combinatorica **16** (1996), no. 3, 321–324, DOI:10.1007/BF01261317. MR 1417342
- MR0366673 [3] Maitreyee Dasgupta, *On some properties of the Cantor set and the construction of a class of sets with Cantor set properties*, Czechoslovak Math. J. **24(99)** (1974), 416–423. MR 366673
- MR0112938 [4] Roy O. Davies, J. M. Marstrand, and S. J. Taylor, *On the intersections of transforms of linear sets*, Colloq. Math. **7** (1959/60), 237–243, DOI:10.4064/cm-7-2-237-243. MR 112938
- MR0089886 [5] P. Erdős and S. Kakutani, *On a perfect set*, Colloq. Math. **4** (1957), 195–196, DOI:10.4064/cm-4-2-195-196. MR 89886
- MR0454931 [6] W. Holsztyński, *Initial and universal metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **58** (1976), 306–310, DOI:10.2307/2041405. MR 454931
- Ho1 [7] W. Holsztynski, $\mathbb{R}^n$ as universal metric space, Notices Amer. Math. Soc. **25** (1978), A–367.
- holpage1 [8] W. Holsztyński, *Metric spaces universal for 2-point spaces*, 2008, Homepage Article, <https://wlod.wordpress.com/article/metric-spaces-universal-for-2-point-1jxfhq4x4sw0j-45/>.
- holpage2 [9] ———, *Metric spaces universal for 3- and 4-point spaces*, 2008, Homepage Article, <https://wlod.wordpress.com/article/metric-spaces-universal-for-3-and-4-1jxfhq4x4sw0j-46/>.
- MR2431353 [10] Tamás Keleti, *Construction of one-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns*, Anal. PDE **1** (2008), no. 1, 29–33, DOI:10.2140/apde.2008.1.29. MR 2431353
- universal [11] Sergei Ovchinnikov, *Universal metric spaces according to w. holsztynski*, arXiv preprint math/0004091 (2000).
- ik2003set [12] Szymon Plewik, *A set of measure zero containing a copy of any finite set.*, Real Analysis Exchange **29** (2003), no. 1,

DOI:<http://dx.doi.org/10.14321/realanalexch.29.1.0413>.

Ste

- [13] Johannes Steindl, *Sets universal in measure*, (20??), note available at http://aurora.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/Seminararbeit__Steindl-Johannes.pdf.