

論文メモ

— エルデシュ的な話：partition? —

ナンブ キトラ

2023 年 12 月 20 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

多分分割？の話の論文の束。

論文^{MR0609665}[1] はなんかカントール集合の分割に関してラムゼーぼい定理を証明している。

論文^{MR0200172}[6] はさらに集合論ぽくてなんかツリーの分割をやっているような気がする。上の話もツリーっぽいけど。

論文^{MR0072928}[4] はなんか平面を測度論的に難しい分割をしている。一般の直積空間についても考察をしている。

論文^{MR1207473}[5] では論文の出だしでシェルピンスキーの例の定理 (コンパクトハウスドルフ空間は可算個の閉集合に分割できない) が引用されており好感が持ってしまう。この定理に対して、ZFC においてコンパクトハウスドルフ空間を $\aleph_1$ 個の閉集合に分割できるかどうかという問題が紹介されている。この問題に関する論文である。例えば $\omega_1 + 1$ はそもそも点の個数が $\aleph_1$ なのでそのように分割できるが、一般のコンパクトハウスドルフ空間はどうだろうか？他にも色々集合論的な分割の問題を紹介している。この論文では $\mathbb{R}$ が $\aleph_1$ -many の疎な集合の和集合にならないという仮定のもとでこの問題が成り立たないコンパクトハウスドルフ空間を構成できることを証明している。連続体仮説の否定とマーティンの公理を仮定するとこの直線に関する仮定は正しいらしいので、この仮定は ZFC の範疇をちょっと超えているが前進ではある。

論文^{MR2071696}[2] では実数を“小さい集合”で被覆するときの最小濃度を調べているような気がする。なんか $\text{cov}(\mathcal{N})$ とかが出てくる。この論文は Darji-Keleti の研究を踏まえてのものだそうで、Darji-Keleti は $\mathbb{R}$ の部分集合 C に対して P が C の **witness** であることを P が完全集合で C の任意の並行移動 $C + x$ について $(C + x) \cap P$ が可算であるときにいうという定義をおいている。こちら辺被覆の話っぽい。それで Daiji-Keleti の結果とし

てコンパクト $C \subset \mathbb{R}$ のパッキング次元が 1 より小さいならば C の witness が存在することを証明したようだ。結果として、どんな連続体濃度より真に小さい実数の部分集合を持ってきてもそこから誘導される普通のカントール集合の並行移動たちでは実数を被覆できないことが従う。Dajti–Keleti のクエスチョンとしてルベーク測度 0 のコンパクト集合について witness が存在するのかわかるものがある。この論文の主定理として論文^{MR2071696}[2]では、集合

$$C_0 = \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!} \mid d_n \in \{0, \dots, n-2\} \right\}$$

が Dajti–Keleti のクエスチョンの否定的な回答になっていることを証明している。つまり、任意の完全集合 P に対して、 C_0 の並行移動 $C_0 + x$ が存在して $(C_0 + x) \cap P$ が非可算になるものが存在することを証明している。

論文^{MR3176143}[3]では一般の位相群上の測度論の話をしている。ポーランド位相群 G の部分集合 X が Haar null であるとはボレル集合 B と G 上の確率ボレル測度 μ が存在して任意の $g, h \in G$ について $\mu(gBh) = 0$ となることである。Christensen の結果として G を局所コンパクトポーランド位相群としたときに $X \subset G$ が上の意味で Haar null であることと、Haar 測度で測度ゼロであることが同値ということを示したらしい。論文^{MR3176143}[3]では上の定義にボレル集合必要なのかわかるという疑問として、 $X \subset \mathbb{R}$ がルベーク測度 0 であることとあるボレル確率測度 μ が存在して任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\mu(X + t) = 0$ かどうかという問題を考えているが、これには反例があることを証明している。他にもまあ色々。セクション 1 だけでも面白いので読むといいと思う。何やら $\{f \in C[0, 1] \mid \exists x \exists f'(x) \in \mathbb{R}\}$ が meager で Haar null であるとか $\{f \in C[0, 1] \mid \exists x \exists f'(x) \in [-\infty, \infty]\}$ は meager だが Haar null ではないことや無限対称群 S_∞ の話とか色々先行研究が紹介されていて楽しい。

参考文献

- ^{MR0609665}[1] Andreas Blass, *A partition theorem for perfect sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), no. 2, 271–277, DOI:10.2307/2043323. MR 609665
- ^{MR2071696}[2] Márton Elekes and Juris Steprāns, *Less than 2^ω many translates of a compact nullset may cover the real line*, Fund. Math. **181** (2004), no. 1, 89–96, DOI:10.4064/fm181-1-4. MR 2071696
- ^{MR3176143}[3] ———, *Haar null sets and the consistent reflection of non-meagreness*, Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 303–322, DOI:10.4153/CJM-2012-058-5. MR 3176143

- MR0072928 [4] Paul Erdős and John C. Oxtoby, *Partitions of the plane into sets having positive measure in every non-null measurable product set*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 91–102, DOI:10.2307/1992838. MR 72928
- MR1207473 [5] Gary Gruenhage, *Partitions of compact Hausdorff spaces*, Fund. Math. **142** (1993), no. 1, 89–100, DOI:10.4064/fm-142-1-89-100. MR 1207473
- MR0200172 [6] J. D. Halpern and H. Läuchli, *A partition theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 360–367, DOI:10.2307/1994406. MR 200172