

論文メモ

— エルデシュ的な話：代数？ —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 4 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下はなんかエルデシュっぽい数学で和に関する話題を集めた論文の束だと思う。

すごく当たり前の話だが、実数 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上の代数と考えた時の超越次数は連続体濃度になる。ゆえに選択公理を仮定すれば連続体濃度をもつ実数の部分集合であって、 $\mathbb{Q}$ 上代数的独立なものをとることができる。フォン・ノイマンの論文^{MR1512442}[6]では超越基底ではないが、とにかく連続体濃度をもつ代数的独立な次数の部分集合を構成している。正の実数 t に関して A_t を

$$A_t = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^{\lfloor tn \rfloor - 2^{n^2}}}$$

と定義すると集合 $\{A_t \mid t \in (0, \infty)\}$ は代数的独立集合になるし、 t が異なると A_t も異なる。これはもちろん ZF の定理である。

論文^{MR0983806}[1]は上のフォンノイマンの論文を読んで自分でも代数的独立な実数を作りたいと思って参考にした論文だと思う。

エルデシュとストーンの定理^{MR0260958}[4]は実数のボレル部分集合 A と B であって $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ がボレルにならない例を構成している。特に彼らの集合はコンパクト集合と G_δ 集合である。コンパクト集合と閉集合の和が閉集合になることは一般の位相群でも証明できる事柄である。このことから特に一般の位相群でもコンパクト集合と F_σ 集合の和が F_σ ということがわかる。特に距離化可能な位相群であればコンパクト集合と開集合の和が F_σ になることがわかる。ということで彼らの構成した和がボレルにならないコンパクト集合と G_δ 集合というのはわかっていることとわかっていなかったことのちょうど境目である。

エルデシュとキューネンの論文^{MR0641304}[3]はボレルではなく、もっと測度論の話である。特に

$\mathbb{R}$ の二つの部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間 G_1, G_2 であって, $G_1 + G_2 = \mathbb{R}$ でなおかつこれら二つの集合の測度が 0 になるものを構成している. ここら辺から集合論っぽい感じになる.

論文^{MR1149411}[7] は上のエルデシュ・キューネンの論文を受けて, 何やらユークリッド空間のパラドキシカルな分解について研究しているようだ. バナッハ・タルスキーの話の仲間.

論文^{MR1142923}[8] は普遍零集合の話らしい. $\mathbb{R}^n$ の部分集合が普遍零集合 (universal null set) であるとは $\mathbb{R}^n$ 上のルベグ測度に関して連続な任意のボレル測度 μ について零集合になることである. よくわかんないけど, 普遍零集合の和などを考察しているようだ. Q -set とか出てくる.

論文^{MR2010332}[2] ではボレル集合と和の話を深掘りしているようだ. σ -ideal とか射影集合とか出てくる.

プレプリント^{kuba2020cantor}[5] は (一般の) カントール集合を含むような $\mathbb{R}$ の部分体やベルンシュタイン集合を含むような部分体を考察しているようだ.

参考文献

- ^{MR0983806} [1] Peter Bundschuh, *A criterion for algebraic independence with some applications*, Osaka J. Math. **25** (1988), no. 4, 849–858. MR 983806
- ^{MR2010332} [2] Jacek Cichoń and Andrzej Jasiński, *A note on algebraic sums of subsets of the real line*, Real Anal. Exchange **28** (2002/03), no. 2, 493–499, DOI:10.14321/realanalexch.28.2.0493. MR 2010332
- ^{MR0641304} [3] P. Erdős, K. Kunen, and R. Daniel Mauldin, *Some additive properties of sets of real numbers*, Fund. Math. **113** (1981), no. 3, 187–199, DOI:10.4064/fm-113-3-187-199. MR 641304
- ^{MR0260958} [4] P. Erdős and A. H. Stone, *On the sum of two Borel sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 304–306, DOI:10.2307/2037209. MR 260958
- ^{020cantor} [5] Gerald Kuba, *Cantor sets and fields of reals*, arXiv preprint arXiv:2007.13550 (2020).
- ^{MR1512442} [6] J. v. Neumann, *Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*, Math. Ann. **99** (1928), no. 1, 134–141, English translation available at <https://www.anothermathblog.com/docs/SystemofAlgIndepNumbers.pdf>, DOI:10.1007/BF01459089. MR 1512442
- ^{MR1149411} [7] Marcin Penconek, *On nonparadoxical sets*, Fund. Math. **139** (1991), no. 3, 177–191, DOI:10.4064/fm-139-3-177-191. MR 1149411

MR1142923

- [8] Ireneusz Reclaw, *Some additive properties of special sets of reals*, Colloq. Math. **62** (1991), no. 2, 221–226, DOI:10.4064/cm-62-2-221-226. MR 1142923