

論文メモ

— ペアノ微分 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文の束はペアノ微分とかタイラー展開を勉強しようとしてそのままになっていたものだと思う。

$\mathbb{R}$ の適切な区間で定義された関数 f について $f^{(n)}$ が点 a で存在するならば

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + o(h^n)$$

となるというのがペアノの剰余項というものである。逆にこれを使って微分を定義するというのがペアノ微分である。つまり点 a における f のペアノ微分とは $f_1(a) \dots f_n(a)$ であって、

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f_i(a)}{i!} h^i + o(h^n)$$

を満たすもののことである。 f^n が存在するならば $f_n = f^{(n)}$ であるが逆は一般には成り立たずそこところが魅力らしい。またこの概念は Whitney の微分可能性と関係ありそうな気がするが、あの概念は各導関数が連続になるのでこの概念ともまた異なりそう。

1 ペアノ微分

1953 年に [19] では、通常の導関数 g ($f' = g$ となる f が存在するということ、このような g は一般には連続とは限らない) が以下のことを満たすと注意する。

- (1) g は第一級の Baire 関数
- (2) g は中間値の定理の帰結を満たす。

(3) g は平均値の定理を満たす (原始関数の f も含めた意味で).

(4) A, B は $B < A$ を満たすとする. このとき $\{x \mid B < g(x) < A\}$ は空であるかもしれないが正の測度をもつ.

これを踏まえた上で, f の n 次のペアノ微分 f_n も上と同様の性質を満たすことを証明している.

1969 年の論文 [22] ではペアノ微分と通常の導関数の存在に関して何やら研究している. Approximate derivative も含めて研究している. この概念はドメインをほとんど至る所埋め尽くす集合 E 上で微分係数を計算した値で定義される. 普通の微分は E じゃなくてドメイン全体で点を近づける.

1970 年の論文 [3] ではちょっと歪みをかけたような n 次の差分の極限が存在することと n 次の Peano 微分が存在することが同値であることを証明している.

1973 年の論文 [7] はちょっとよくわかんなかった. ごめん. 測度論的性質を研究している気がする.

1993 年の論文 [11] ではさらに一般化しててよくわかんない. ごめん!

1997 年の論文 [12] は [11] の発展だと思う. path derivative というのを研究している.

1998 年の論文 [21] もよくわかんなかった. [11] の発展だと思う.

2008 年の論文 [14] は多変数のペアノ微分に関してそれが実際に意味で微分可能であるかどうかの十分条件を与えているような気がする. 2013 年の論文 [13] も多変数の Peano 微分の話だと思う.

2013/14 年の論文 [9] では完全集合 P 上で定義された関数のペアノ微分を考察している. この研究の感じは Whitney 微分を彷彿とさせるのでこれ面白んじゃないかな. 論文 [8] もなんかそういう話で面白そう. 論文 [9] では P 上で定義された無限開微分可能関数で $f(P) = P^2$ となるものを構成し, 連続微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は絶対に完全集合をその平方に写さないことを証明している. なんかもすごい面白い気がする.

2 テイラー展開

1937 [17] テイラーの定理が証明されている. いい感じの定数おいて最後に求めるやつ. 帰納的にやるやつ.

1949 年 [15] なんかも $f^{(k)}(a)$ だけではなく $f^{(k)}(x)$ も使うテイラー展開を証明している.

1963 [5] クラスルームノート. いろいろな形式のテイラー展開を解説している. リマールク 2 では $[0, 1]$ 上の関数 f で f' も常に存在するし, $f''(0)$ も存在するが f' がリーマン積

分不可能な例を挙げている.

1967 [6] では $f^{(n)}$ が存在するための必要十分条件をテイラー展開で特徴付けしている.

1980 [1] ではテイラーの定理に出てくる $a + \theta(x - a)$ の θ の $x \rightarrow a$ の極限について調べている. この極限についてはなんと先行研究があるらしい. それを多変数に拡張している. こういう極限を計算すると数値計算へと応用があるようだ.

1989 [2] では多変数のテイラーの定理の短い証明を与えている気がする.

1990 [4] では多変数のテイラー展開をなるべく小さい仮定で証明しているような気がする.

3 その他

Saks の論文 [20] はなんかもうよくわかんないんだけど, 3 次の差分の極限のが正みたいな仮定をして導関数の連続性を証明している.

1947 [10] では以下の定理を証明している.

定理 1. f は $[a, b]$ 上で定義された関数でこの上で微分可能とする. このとき任意の α, β に関して集合

$$\{x \in [a, b] \mid \alpha < f'(x) < \beta\}$$

は空集合であるか, もしくは正の測度を持つ. ここで f' は無限大の値も許すらしい.

この性質を Denjoy–Clarkson property と呼ぶらしい.

1962 [16] では上の定理を proximate derivative にまで拡張している.

1970 [18] では上の定理を二次元に拡張してる.

参考文献

- [1] A. S. Adikesavan, *A note on Taylor's theorem*, Indian J. Pure Appl. Math. **11** (1980), no. 4, 444–449. MR 567920
- [2] Jose A. Facenda Aguirre, *The Teaching of Mathematics: A Note on Taylor's Theorem*, Amer. Math. Monthly **96** (1989), no. 3, 244–247, DOI:10.2307/2325214. MR 1541471
- [3] J. Marshall Ash, *A characterization of the Peano derivative*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 489–501, DOI:10.2307/1995409. MR 259041

- [4] J. Marshall Ash, A. Eduardo Gatto, and Stephen Vági, *A multidimensional Taylor's theorem with minimal hypothesis*, Colloq. Math. **60/61** (1990), no. 1, 245–252, DOI:10.4064/cm-60-61-1-245-252. MR 1096374
- [5] W. R. Ballard, A. E. Livingston, and W. M. Myers, Jr., *Classroom Notes: A Variant of Taylor's Theorem*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), no. 8, 865–868, DOI:10.2307/2312677. MR 1532320
- [6] P. R. Beesack, *Mathematical Notes: Taylor's Formula and the Existence of n th Derivatives*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), no. 8, 980–986, DOI:10.2307/2315285. MR 1534508
- [7] P. S. Bullen and S. N. Mukhopadhyay, *On the Peano derivatives*, Canadian J. Math. **25** (1973), 127–140, DOI:10.4153/CJM-1973-012-7. MR 311845
- [8] Monika Ciesielska and Krzysztof Chris Ciesielski, *Differentiable extension theorem: a lost proof of V. Jarník*, J. Math. Anal. Appl. **454** (2017), no. 2, 883–890, DOI:10.1016/j.jmaa.2017.05.032. MR 3658803
- [9] Krzysztof Chris Ciesielski and Jakub Jasinski, *Smooth Peano functions for perfect subsets of the real line*, Real Anal. Exchange **39** (2013/14), no. 1, 57–72. MR 3261899
- [10] J. A. Clarkson, *A property of derivatives*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 124–125, DOI:10.1090/S0002-9904-1947-08757-7. MR 19712
- [11] Hajrudin Fejzić, *On generalized Peano and Peano derivatives*, Fund. Math. **143** (1993), no. 1, 55–74, DOI:10.4064/fm-143-1-55-74. MR 1234991
- [12] Hajrudin Fejzić and Dan Rinne, *Peano path derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 9, 2651–2656, DOI:10.1090/S0002-9939-97-03878-1. MR 1396976
- [13] Hajrudin Fejzić and Clifford E. Weil, *A property of Peano derivatives in several variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 7, 2411–2417, DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11529-7. MR 3043022
- [14] Andreas Fischer, *Differentiability of Peano derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 5, 1779–1785, DOI:10.1090/S0002-9939-07-09320-3. MR 2373608
- [15] P. M. Hummel and C. L. Seebeck, Jr., *A generalization of Taylor's expansion*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 243–247, DOI:10.2307/2304764. MR 28907
- [16] Solomon Marcus, *On a theorem of Denjoy and on approximate derivative*, Monatsh. Math. **66** (1962), 435–440, DOI:10.1007/BF01298240. MR 151558
- [17] R. E. Moritz, *Questions, Discussions, and Notes: A Note on Taylor's Theo-*

- rem*, Amer. Math. Monthly **44** (1937), no. 1, 31–33, DOI:10.2307/2301329. MR 1523823
- [18] S. N. Mukhopadhyay, *On a certain property of the derivative*, Fund. Math. **67** (1970), no. 3, 279–284, DOI:10.4064/fm-67-3-279-284. MR 259040
- [19] H. William Oliver, *The exact Peano derivative*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 444–456, DOI:10.2307/1990791. MR 62207
- [20] S. Saks, *On the Generalized Derivatives*, J. London Math. Soc. **7** (1932), no. 4, 247–251, DOI:10.1112/jlms/s1-7.4.247. MR 1574835
- [21] R. E. Svetic and H. Volkmer, *On the ultimate Peano derivative*, J. Math. Anal. Appl. **218** (1998), no. 2, 439–452, DOI:10.1006/jmaa.1997.5805. MR 1605380
- [22] Clifford E. Weil, *On approximate and Peano derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 487–490, DOI:10.2307/2035682. MR 233944