

論文メモ

— 可分性と直積 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文は Hewitt-Pondiczery-Marczewski の定理について調べようとしてほったらかしになった論文だと思う。この長い名前が連なっている定理は連続体濃度をもつ可分空間の族の直積も可分という定理である。

論文 [1] では以下のことを証明している。

定理 1. 以下が成り立つ。

- (1) m を基数とし $\{X_i\}_{i \in I}$ を位相空間の族とする。もしも $|I| \leq 2^m$ で各 X_i がたかだか濃度 m の稠密部分集合を持つのなら $\prod_{i \in I} X_i$ も濃度がたかだか m の稠密部分集合を持つ；
- (2) D を無限離散空間とすると

$$|\beta D| = 2^{2^{|D|}}$$

が成り立つ。

論文 [2] はちょっとよくわかんなかったので詳しい解説ができないが、添字集合 I の濃度に制限をつけずに、可分空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ の直積が可分になるための必要十分条件を、separation という概念を用いて記述している。

思うに、このなんとかの定理というのは位相空間の定理というよりかは、集合論的な組み合わせ論の定理なのではないのだろうか。

これら以外にも論文はあるが、そういうのはこれらの論文が引用している論文やこれらの論文を引用している論文を確かめられたい。

参考文献

- [1] Robert L. Blair, *The Hewitt-Pondiczery-Marczewski theorem on the density character of a product space*, Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 422–424, DOI:10.1007/BF01304909. MR 315649
- [2] J. Väisälä, *The separability of cartesian products*, Colloq. Math. **17** (1967), 285–288, DOI:10.4064/cm-17-2-285-288. MR 221471