

論文メモ

— ボレル階層とか —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文はボレル階層とかを調べようとして放置されていた論文の束だと思う。

論文 [3] の用語をおさらいしよう。一般に距離空間 X が**絶対 α 次ボレル階層**を持つ (α は可算順序数) とは任意の距離空間 Y に X を位相的に埋め込んだ時に Y の中で X が α 次のボレル集合になっている時にいう。埋め込む先は距離空間というのが大事である。この用語を踏まえた上で、よく知られた事実として X が絶対 G_δ であることと X がポーランドであることが同値である。こういうのはブルバキに書いている。ブルバキは一般性を志向している感じがするが急にポーランド空間とか具体的な話を扱い始めるのでなんか物珍しいと思う。論文 [3] では距離空間が絶対 F_σ になるための必要十分条件を導出している。ちなみに X が可分の場合には絶対 F_σ と σ コンパクト性が同値ということは知られていたようだ。他にも大体以下のようなことを証明している。

定理 1 ([3]). 以下が成り立つ。

- (1) 距離空間 X が絶対 $F \cap G$ 空間 (つまり開集合と閉集合の共通部分で絶対書かれる) ための必要十分条件は X が局所コンパクトであることである。
- (2) X が絶対 F_σ であるための必要十分条件はそれが可算個の局所コンパクト (距離) 空間の和集合で表されること (σ -locally compact) である。

論文 [2] は距離空間ではなく、一般の位相空間の絶対閉性を扱っている。位相空間 X が絶対閉というのはハウスドルフ空間に埋め込んだ時に必ず閉集合になるという意味でこれはコンパクト性の一般化と見做せる。論文ではハウスドルフ空間は絶対閉空間に閉集合として必ず位相的に埋め込めるとか絶対閉包が productive になる必要十分条件とか絶対閉空間の圏の射影対象や入射対象の研究をしているようだ。

論文 [1] ではタイトル通りボレル集合の和について研究している．ここで和と言っているが**和集合ではなく**， $\mathbb{R}$ の二つの部分集合 A と B に対して $\mathbb{R}$ の足し算を使って定義される

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

である．ざっくりいうと A と B がボレル集合だとしても $A + B$ がボレルとは限らなし，例え A と B がそれぞれコンパクト， G_δ だとしても $A + B$ がボレルとは限らないという例を構成している．コンパクトとか G_δ というのは人間にとってかなり都合のいいボレル階層であることに注意しよう．また，コンパクト集合と閉集合の和は閉集合になり，閉集合は距離空間の中だと G_δ 集合であることにも注意しよう．この事実からコンパクト集合と F_σ 集合の和が F_σ になることがわかるので，コンパクト集合と G_δ の和というのはすでに知られていることと不明だったことのちょうど境目である．エルデシュとストーンはフォンノイマンが構成した $\mathbb{R}$ の連続体を持つ部分集合であって $\mathbb{Q}$ 上代数的独立な具体的 (ZF で構成できる) なものを使って，(まあこれはカントール集合に同相だったりするのだが)，和がボレルにならないものを構成している．また $\mathbb{R}$ 以外の位相群でもできるっぽいことを注意している．

この種の話題はこれらの論文に限らない．これらの論文が引用している論文や，これらの論文を引用している論文を確かめられたい．

参考文献

- [1] P. Erdős and A. H. Stone, *On the sum of two Borel sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 304–306, DOI:10.2307/2037209. MR 260958
- [2] Chen-tung Liu, *Absolutely closed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 86–104, DOI:10.2307/1994772. MR 219024
- [3] A. H. Stone, *Absolute F_σ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 495–499, DOI:10.2307/2034811. MR 138088