

論文メモ

— Countable dense homogeneity —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

この論文の束は位相空間の countable dense homogeneity (可算稠密等質性) を調べた時に集めたものだと思う。位相空間 X が countably dense homogeneous であるとは X の可算な稠密部分集合 A と B に対してある同相写像 $f: X \rightarrow X$ であって $f(A) = B$ を満たすものが存在する時にいう。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の可算稠密等質性ははてなブログ電波通信でも紹介したことがある (<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2022/03/13/153112>)。あの記事は有名な次元論の本 [6] で紹介されていた証明方法にギャップがあったので埋めたという記事である。ちなみに可算稠密等質性をもつ空間が普通の意味で等質性を満たすかどうかはどうやら微妙らしい。

論文 [2] と [5] は $\mathbb{R}^n$ の可算稠密等質性を証明した論文らしいことがメモとして本棚に残されていたが、フランス語とドイツ語なのでよくわかんなかった。

論文 [1] は countable dense homogeneity を初めて定義した論文だと思う。位相空間 X が strongly locally homogeneous とは任意の点 $x \in X$ とその任意の開近傍 U についてある x の開近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在して任意の $y \in V$ について同相写像 $h: X \rightarrow X$ が存在して $h(x) = y$ であって、 $h|_{X \setminus U} = 1_X$ を満たすものが存在する時にいう。ユークリッド空間とか、カントール集合とかはこの性質を満たす。この時以下を示している。

定理 1. X を局所コンパクトな可分距離空間で *strongly locally homogeneous* と仮定する。この時 X は *countable dense homogeneous* である。

この定理からユークリッド空間が countable dense homogeneous であることがわかる。

論文 [7] では $\mathbb{R}^n$ の CDH の同相写像 f は任意に $\epsilon \in (0, \infty)$ を与えたとして $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - x| < \epsilon$ を満たすように取れることを証明している。

論文 [8] では位相空間 X に何か適切な条件をつけて可算稠密等質性から他の等質性を導くということをやっている。

論文 [4] は可算稠密等質性と Baire 性質について調べていると思うけどよくわかんなかったごめん! CH とかを仮定する話をしているので set-theoretic topology になると思う。

論文 [9] ではポーランド空間であって、可算稠密等質性を持ちながら稠密開集合であってそれは自己同相写像が恒等写像しかないものを持つようなものを構成している。すごい変な空間。

[3] は等質性に関するサーベイである。可算稠密等質性も扱っている。可算稠密等質性についてまた調べたくなったらこの論文が引用している論文やこの論文を引用している論文に目を通せばいいと思う。

参考文献

- [1] Ralph Bennett, *Countable dense homogeneous spaces*, Fund. Math. **74** (1972), no. 3, 189–194, DOI:10.4064/fm-74-3-189-194. MR 301711
- [2] L. E. J. Brouwer, *Über den natürlichen Dimensionsbegriff*, J. Reine Angew. Math. **142** (1913), 146–152, DOI:10.1515/crll.1913.142.146. MR 1580864
- [3] Ben Fitzpatrick, Jr. and Hao Xuan Zhou, *A survey of some homogeneity properties in topology*, Papers on general topology and related category theory and topological algebra (New York, 1985/1987), Ann. New York Acad. Sci., vol. 552, New York Acad. Sci., New York, 1989, pp. 28–35, DOI:10.1111/j.1749-6632.1989.tb22383.x. MR 1020771
- [4] ———, *Countable dense homogeneity and the Baire property*, Topology Appl. **43** (1992), no. 1, 1–14, DOI:10.1016/0166-8641(92)90148-S. MR 1141367
- [5] Maurice Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, Math. Ann. **68** (1910), no. 2, 145–168, DOI:10.1007/BF01474158. MR 1511557
- [6] Witold Hurewicz and Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, vol. 4, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941. MR 6493
- [7] Henry Sharp, Jr., *Autohomeomorphisms on E^n* , Fund. Math. **59** (1966), 171–175, DOI:10.4064/fm-59-2-171-175. MR 203711

- [8] Gerald S. Ungar, *Countable dense homogeneity and n -homogeneity*, Fund. Math. **99** (1978), no. 3, 155–160, DOI:10.4064/fm-99-3-155-160. MR 482626
- [9] Jan van Mill, *A countable dense homogeneous space with a dense rigid open subspace*, Fund. Math. **201** (2008), no. 1, 91–98, DOI:10.4064/fm201-1-3. MR 2439024