

論文メモ

— 多項式近似 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文は多項式近似について調べているときに集めた論文だと思う。同じファイルに入っていた。

論文 [5] はワイエルストラスの近似定理のサーベイである。これ読めば大体オッケーじゃない？

論文 [1] はストーン・ワイエルストラスの定理の一般化でこれは Bishop の定理として知られているようだがなんかよくわかんなかった。anti-symmetric という概念が大事ならしい。

論文 [4] ではバナッハ代数の中でストーン・ワイエルストラスの性質を研究している。

論文 [6] はその Bishop によるストーン・ワイエルストラスの一般化の短い初等的な証明を与えているようだ。short proof や elementary proof は見たことたくさんあるが、short elementary proof は全然見たことない。この論文のラインナップからすると、ストーンワイエルストラスの定理のあの初等的な証明の論文があつて然るべきだが、なかった→ Brosowski and Deutsch, *An elementary proof of the Stone–Weierstrass theorem*, Proc AMS, 81 (1981), 89–92.

論文 [3] では $(-\infty, \infty)$ で定義された連続関数に関してかなり具体的な多項式近似を与えている。具体的には $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とし $\Theta \in (0, 2^{-1})$ を任意に与える。このとき $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$L(x; f) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-1}^1 f(n^\Theta t) \left(1 - \left(t - \frac{x}{n^\Theta}\right)^2\right)^n dt$$

というふうに定義すると $L_n(x; f)$ は x の多項式だし、 $L_n(x; f)$ は $f(x)$ に各点収束するし、任意の有界閉集合上で一様収束になっているということを証明している。こういう具

体的なのいいと思う。

論文 [2] ではルンゲの定理の short proof を与えている。

論文 [7] はカントールが導入したカントール積に関する論文である。カントールによると、 $x > 1$ は適当に正の整数列 $\{q_n\}$ を取ると

$$x = \prod_n \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)$$

と表すことができるようだ。この積を 1 じゃなくて途中から始めた無限積を考えてその確率論的振る舞いを考察しているようである。なんでこの論文がこのラインナップの中に入っているのかよくわからない。多項式近似には確率論的アプローチもあるから何か関係性を見出せそうではあるけれども、多分紛れ込んだんじゃないかなと思う。

参考文献

- [1] Errett Bishop, *A generalization of the Stone-Weierstrass theorem*, Pacific J. Math. **11** (1961), 777–783. MR 133676
- [2] Sandy Grabiner, *A short proof of Runge’s theorem*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), no. 10, 807–808, DOI:10.2307/2318689. MR 427639
- [3] L. C. Hsu, *The polynomial approximation of continuous functions defined on $(-\infty, \infty)$* , Czechoslovak Math. J. **9(84)** (1959), 574–578. MR 109975
- [4] Yitzhak Katznelson and Walter Rudin, *The Stone-Weierstrass property in Banach algebras*, Pacific J. Math. **11** (1961), 253–265. MR 126738
- [5] Dilcia Pérez and Yamilet Quintana, *A survey on the Weierstrass approximation theorem*, Divulg. Mat. **16** (2008), no. 1, 231–247, DOI:10.4310/cag.2008.v16.n1.a8. MR 2587018
- [6] T. J. Ransford, *A short elementary proof of the Bishop-Stone-Weierstrass theorem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **96** (1984), no. 2, 309–311, DOI:10.1017/S0305004100062204. MR 757664
- [7] A. Rényi, *On Cantor’s products*, Colloq. Math. **6** (1958), 135–139, DOI:10.4064/cm-6-1-135-139. MR 103874