

# 論文メモ

## — 固有写像 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 3 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文の束は固有写像について調べた痕跡だと思われる。

これは何回も同じようなことを書いていると思うが、固有写像という用語はブルバキによって閉写像でファイバーがコンパクトなやつとして導入されたと思うのだが、いや、普遍閉だったかも、まあとにかく、なぜか時代が進むとこの意味での固有写像は完全写像と呼ばれるようになり、固有写像というのはコンパクト集合の引き戻しがコンパクトという定義になった。この現代的な意味での固有写像と、完全写像つまり元々の固有写像の概念は一致しない。一般に完全写像ならば現代風の固有写像、つまりコンパクト集合の引き戻しがコンパクトになる。逆に考えている空間が  $k\text{-space}$  とかだと現代風の固有写像は完全写像になる。さらにブルバキでは完全写像 (元々の固有写像) が普遍閉写像と一致するということが示されている。つまり写像  $f: X \rightarrow Y$  が完全写像であることと、任意の位相空間  $Z$  について写像  $f \times 1_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$  が閉写像であることは同値である。固有写像って一体なんなんじゃいというのはみんな気になっているようである (斎藤毅「Proper 射の謎」<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/jd/proper.pdf>)。ブルバキには代数幾何の人がすごいと思うので、代数幾何学的に発見された概念をブルバキの位相の巻に付け加えたのかもしれない。まあとにかく不思議な定義であるし、まあこの定義自体はコンパクト性を写像の概念として落とし込もうとした結果とも見れなくない (空間の話射の話に言い換えるあのアレね)、それで不思議な定義の変容を辿っている概念である。

論文 [4] では  $k\text{-space}$  の上だと現代風の固有写像が閉写像になることを証明している。位相空間が compactly closed というのは二つのコンパクト部分集合の共通部分がコンパクトになることで  $k\text{-space}$  っぽい概念。

[5] では almost-open, bi-quotient, compact-covering, compact-trace, countably bi-

quotient, pseudo-open,  $P_2$ , quotient maps などの性質を研究している.  $k$ -space も出てくる.

Michael の論文 [3] では次の定理の簡単な証明を与えている.

**定理 1.**  $f: X \rightarrow Y$  を完全写像とし,  $g: X \rightarrow Z$  は連続写像で  $Z$  はハウスドルフとする. このとき  $(f, g): X \rightarrow Y \times Z$  は完全写像である.

証明.  $(f, g)$  を以下のように分解する.

$$X \xrightarrow{(1_X, g)} X \times Z \xrightarrow{f \times 1_Z} Y \times Z$$

ここで写像  $(1_X, g)$  は  $X$  と  $g$  のグラフを結ぶ同相写像であり,  $Z$  がハウスドルフであるから  $g$  のグラフは  $X \times Z$  の中で閉集合になる (ここがハウスドルフポイント). よって  $(1_X, g)$  は閉写像になる. 特に完全写像である. そして完全写像同士の直積写像は完全写像になる (ここがこの証明唯一の非自明ポイント. 証明はブルバキに書いてある) ので  $f \times 1_Z$  は完全写像である. よってこれら二つの写像の合成である  $(f, g)$  も完全写像である. □

この定理からいろいろな既存の定理を系として導出している.

論文 [2] では  $Y$  をハウスドルフ空間として開写像でもあるような (現代風の) 固有写像  $f: X \rightarrow Y$  が全射になる必要十分条件を求めている. これ一体何をしているのかと言うと, 被覆写像の話がしたいということだと思う. なんかそういう感じのことが書いてある. [1] もそういう話.

## 参考文献

- [1] Wenyan Chen and Shutang Wang, *A sufficient condition for covering projection*, Proceedings of the Spring Topology and Dynamical Systems Conference (Morelia City, 2001), vol. 26, 2001/02, pp. 147–152. MR 1966988
- [2] Chung Wu Ho, *A note on proper maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 237–241, DOI:10.2307/2039880. MR 370471
- [3] Ernest Michael, *A theorem on perfect maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 633–634, DOI:10.2307/2038028. MR 275387
- [4] Richard S. Palais, *When proper maps are closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 835–836, DOI:10.2307/2037337. MR 254818

- [5] Frank Siwiec and Vincent J. Mancuso, *Relations among certain mappings and conditions for their equivalence*, General Topology and Appl. **1** (1971), no. 1, 33–41. MR 282347