

論文メモ

— 位相的特徴付け —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 30 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

この論文の束は特別な位相空間の特徴付けに関するものだと思う。

1 本文

1.1 実直線とかの特徴付け

論文 [32] が最初に直線の特徴付けした論文のように見える。この論文では直線 $\mathbb{R}$ を連結、局所連結、可分距離空間であって、どの一点の補集合も二つの連結成分を持つような空間として特徴付けしている。Moore の 1920 年の論文 [21] もこの話題に関する重要な論文のような気がするが、書かれている数学語が古語なのでちょっと読みづらくてわかんなかった。

論文 [24] で M. E. Rudin は実数直線を可分距離空間 E でなおかつ次の二つの条件 1. その連結成分が一点か arc になりそして arc になる成分 A のどんな内点も $E \setminus A$ の極限点にならない; 2. E のどんな近傍も境界集合が有限集合になるような基本近傍系をもつ、という空間として特徴付けした。

Bing の論文 [3] は学術論文というよりかは実数の特徴付けに関する解説論文である。その中で実数直線 L は四つの公理; 公理 1 : L is a linear topological space (この条件は今ふうに言うと LOTS であるということである); 公理 2 : L は最大値と最小値を持たない; 公理 3 : L は連結; 公理 4 : L は可分である、で特徴付けできることがまず紹介されている。そして公理 4 を公理 4' : L の互いに交わらない開集合の族はたかだか可算族である、に置き換えたとき、 L が実数直線と同相であるかどうかは未解決問題であることを述べている。この公理 1, 2, 3, 4' を満たす直線で $\mathbb{R}$ と同相ではないものはススリン線と呼

ばれる。このススリン線が存在するのかどうかと言う問題は**ススリンの問題**と呼ばれている。ここで注意して欲しいのはこの論文が発表されたのは 1960 年であることで、次いでススリン線にまつわる集合論的見識が深まったのは 60 年代の後半だと言うことである。ちなみに**強制法**の発明は 1963 年くらいらしい。今ではススリンの問題は ZFC と独立であると言うことが知られている。こういう「歴史の痕跡」のような文献を見つけると楽しくなります。

論文 [15] は一般化対角線を引っこ抜いた直積空間が連結であることが直線と円周の特徴付けになっているらしいが、よくわからなかった。

論文 [13] も実数の位相的特徴付けの話だと思う。

論文 [22] では位相群としての $\mathbb{R}$ を特徴付けしている。 G を離散的ではない局所コンパクトな位相群としたとき、 G の真部分群であって閉であるものが常に離散的であることと G が 1 次元トーラスか $\mathbb{R}$ に位相群として同型であることは同値であることを証明している。

論文 [23] では、弧状連結なハウスドルフ空間が連続選択子を持つならばそれは一点か、 $[0, 1)$, $[0, 1]$, もしくは $\mathbb{R}$ に同相であることを証明している。ここで位相空間 X が連続選択子を持つとは、 $\mathcal{F}(X)$ を X の空でない閉集合全体に Vietoris 位相を入れたものとして、連続関数 $f: \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ であって $f(F) \in F$ を満たすものが存在することである。

論文 [27] では order topology を T_1 空間であって二つも minimal な T_0 位相の upper bound として表せるものとして特徴付けをした上で、 $\mathbb{R}$ を connected separable な T_1 空間でその位相は二つの minimal T_0 位相の upper bound になっているものとして特徴付けしている。

プレプリント [20] では cut-point space というものとコンパクト化の関係を見ているらしいがよくわからず。

Brown の論文 [6] はなんていうかなんか大事なことをしているような気がする。 X の部分集合列 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に関して V_i が $\mathbb{R}^n$ に同相で $V_i \subset V_{i+1}$ で $X = \bigcup_i V_i$ ならば X は $\mathbb{R}^n$ に同相であることを証明している。

論文 [19] では局所連結な局所コンパクト距離空間が $\mathbb{R}$ の連続単写像になるならばそれは五種類の空間に分類できることを証明している。 $\mathbb{R}$, 8 , $\bigcirc-\bigcirc$, θ , $\bigcirc-$, の五種類である。

1.2 順序数

論文 [14] では位相空間 X の点を分離するような X の集合族から誘導される順序を用いて順序数を特徴付けしている。

1.3 シェルピンスキーの三角形

Vejnar の論文 [31] ではシェルピンスキーの三角形を位相的に特徴付けしている．詳細を述べるのはちょっと難しいので論文を読まれたし．

1.4 0 次元空間

記事 [29] や記事 [8] にも色々書いてある．論文 [30] にも以下の基本的な空間の特徴付けのまとめや表とかが書いてある．読むといいと思う．この論文自体は以下に紹介する基本的な 0 次元空間の完全写像による像に関する論文である．

1.4.1 カントール集合の特徴付け

カントール集合 C はブラウワーの論文 [5] で完全不連結性で孤立点を持たないコンパクト距離化可能空間として特徴付けられているらしいがなんかとても読みにくい文章で書かれているのでそこまで自信がない．多分 Theorem 5, と 6 がそれに該当すると思う．100 年前の英語の言葉遣いなのでなんか読みにくい．ケクリス [17] にも証明が載っている．

論文 [25] ではカントール集合をコンパクト距離空間 X であって、1. X はコンパクトな開集合を少なくとも一つ持ち、そして非コンパクトな開集合も少なくとも一つもつ、2. コンパクトな開集合は全て同相 3. 非コンパクトな開集合は全て同相の性質を持つものとして特徴付けた．

論文 [11] では、upper semi-continuous map の話を用いて以下のことを証明されている．可分距離空間 X が 0 次元で孤立点を持たず、ポーランドであるならば連続全単射 $f: X \rightarrow C$ が存在することを証明した．全単射であるだけで同相ではないし、同相にならない X も構成できる．特に X がコンパクトの場合にはコンパクトからハウスドルフへの連続全単射なので同相になる．

1.4.2 無理数の空間 (ベール空間) の特徴付け

無理数の空間 $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の特徴付けは論文 [1] でウリゾーンによって与えられた．ちなみにこの空間 $\mathbb{P}$ は可算離散空間の可算直積 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と同相であり、この二つの空間の同相を与える典型的な写像は**連分数**である．位相的特徴付けとしては、0 次元ポーランド空間であって、その任意のコンパクト部分集合は絶対に内点を持たない空間として特徴付けされる．後半の条件から孤立点を持たないことがわかる．ケクリス [17] にも証明が載って

いる.

1.4.3 有理数の特徴付け

有理数の空間の特徴付けは [26] で初めて与えられたらしい. フランス語で書かれているのであんまり読めない. 曰く, 有理数の空間 $\mathbb{Q}$ とは可算な距離空間であって, 孤立点を持たない空間として特徴付けできる. なので孤立点がない可分距離空間の可算な稠密部分集合を考えるとそれらは全て同相であり, $\mathbb{Q}$ に同相である. $\mathbb{Q}^2$ とか $\mathbb{Q}^n$ とかも全部 $\mathbb{Q}$ に同相である. なぜか知らないがこの特徴付けの簡単な証明が時々発見されている. 詳細は [4], [7], や [9] を参照のこと. [9] が一番新しい. またプレプリント [12] でもブラウワーの定理とシェルピンスキーの定理が紹介されている. 論文 [10] ではカントール集合の特徴付けを用いて $\mathbb{Q}$ の特徴付けを証明している.

1.4.4 $\mathbb{Q} \times C$

van Mill の論文 [28] によればアレキサンダーとウリゾーンの論文 [1] では $\mathbb{Q} \times C$ を 0 次元な可分距離空間で σ コンパクトでコンパクト部分集合が常にはない点を持たずどの開集合も可算ではないような空間として特徴付けしていると言う. しかしドイツ語が読めないなので, 論文 [1] の記述は私はよくわかっていない. 論文 [16] も参照のこと.

1.4.5 $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$

同じく van Mill の論文 [28] では $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ を 0 次元可分距離空間であって, 可算個のポーランド部分空間で被覆され (σ -complete), どの開集合も完備ではなく σ -コンパクトではないような空間として特徴付けしている.

1.5 任意の空でないコンパクト距離空間がカントール集合の連続像になること

趣がちょっと異なるが, 任意の空でないコンパクト距離空間がカントール集合の連続像になるという定理に関する論文を紹介する. ちなみにこの定理はアレキサンドロフとハウスドルフにより独立に証明されたらしい.

論文 [18] はサーベイだと思うが, 掲載されているジャーナル? がよくわからない感じ. まあサーベイである. ハーン・マズルキーウィッチの定理, つまり単位閉区間の連続像になるような空間の特徴づけも紹介されている.

論文 [2] では上記の定理の応用を紹介している. セクション 1 では space-filling curve

を構成している．セクション 2 ではなんか凸解析っぽい普遍空間の存在を述べる Graża-siewicz の定理を証明している．セクション 3 では $C[0, 1]$ に可分距離空間を等長に埋め込めるといふ Banach-Mazur の定理を証明している．セクション 4 では連続関数であって、全ての有界関数を補完するものを構成している．詳しく述べると以下である．

定理 1. 連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって、以下の条件を満たすものが存在する：両側に伸びた数列 $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ であって $|y_i| \leq 1$ も満たす任意のものに対して $t \in \mathbb{R}$ が存在して $y_i = f(t + i)$ を任意の $i \in \mathbb{Z}$ でみたす．

セクション 6 では上の定理の変種を探索している．セクション 7 では非常にゆっくりと 0 に収束する関数列を構成している．これのオリジナルは W. Rudin らしい (A very slowly convergent sequence of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 39 (1973), 647–648).

参考文献

- [1] Paul Alexandroff and Pavel Urysohn, *Über nulldimensionale Punktmengen*, Math. Ann. **98** (1928), no. 1, 89–106, DOI:10.1007/BF01451582. MR 1512393
- [2] Yoav Benyamini, *Applications of the universal surjectivity of the Cantor set*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), no. 9, 832–839, DOI:10.2307/2589212. MR 1650866
- [3] R. H. Bing, *A Topological Characterization of a Line*, Amer. Math. Monthly **67** (1960), no. 7, 38–41, DOI:10.2307/2308632. MR 1530892
- [4] Aleksander Błaszczyk, *A simple proof of Sierpiński’s theorem*, Amer. Math. Monthly **126** (2019), no. 5, 464–466, DOI:10.1080/00029890.2019.1577103. MR 3949184
- [5] Luitzen EJ Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, KNAW, Proceedings, vol. 12, 1910, available at <https://dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00013496.pdf>, pp. 1909–1910.
- [6] Morton Brown, *The monotone union of open n -cells is an open n -cell*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 812–814, DOI:10.2307/2034881. MR 126835
- [7] Krzysztof Ciesielski, *Sierpiński’s topological characterization of $\mathbb{Q}$* , Math. Mag. **93** (2020), no. 2, 136–138, DOI:10.1080/0025570X.2020.1708187. MR 4079948

- [8] Abhijit Dasgupta, *Countable metric spaces without isolated points*, 2005, Topology Explained, Topology Atlas.
- [9] Frederick K. Dashiell, Jr., *Countable metric spaces without isolated points*, Amer. Math. Monthly **128** (2021), no. 3, 265–267, DOI:10.1080/00029890.2021.1856586. MR 4217759
- [10] Carl Eberhart, *Some remarks on the irrational and rational numbers*, Amer. Math. Monthly **84** (1977), no. 1, 32–35, DOI:10.2307/2318303. MR 644644
- [11] M. K. Fort, Jr., *One-to-one mappings onto the Cantor set*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **25** (1961), 103–107. MR 139142
- [12] Michael Francis, *Two topological uniqueness theorems for spaces of real numbers*, arXiv preprint arXiv:1210.1008 (2012).
- [13] S. P. Franklin and G. V. Krishnarao, “*On the topological characterization of the real line*”: *An addendum*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 392, DOI:10.1112/jlms/s2-3.3.392. MR 282341
- [14] Chris Good and Kyriakos Papadopoulos, *A topological characterization of ordinals: van Dalen and Wattel revisited*, Topology Appl. **159** (2012), no. 6, 1565–1572, DOI:10.1016/j.topol.2011.02.014. MR 2891422
- [15] Benjamin Halpern, *A characterization of the circle and interval*, Pacific J. Math. **32** (1970), 373–414. MR 257981
- [16] Kazuhiro Kawamura, Lex G. Oversteegen, and E. D. Tymchatyn, *On homogeneous totally disconnected 1-dimensional spaces*, Fund. Math. **150** (1996), no. 2, 97–112, DOI:10.4064/fm-150-2-97-112. MR 1391294
- [17] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995, DOI:10.1007/978-1-4612-4190-4. MR 1321597
- [18] L Koudela, *The hausdorff–alexandroff theorem and its application in theory of curves*, WDS 2007 - Proceedings of Contributed Papers, Part I **7** (2007), 257–260.
- [19] A. Lelek and L. F. McAuley, *On hereditarily locally connected spaces and one-to-one continuous images of a line*, Colloq. Math. **17** (1967), 319–324, DOI:10.4064/cm-17-2-319-324. MR 220251
- [20] David S Lipham, *Compactification of cut-point spaces*, arXiv preprint arXiv:1909.10646 (2019).

- [21] Robert L. Moore, *Concerning simple continuous curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **21** (1920), no. 3, 333–347, DOI:10.2307/1988935. MR 1501148
- [22] Sidney A. Morris, *A characterization of the topological group of real numbers*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), no. 3, 473–475, DOI:10.1017/S0004972700010352. MR 866194
- [23] Tsugunori Nogura and Dmitri Shakhmatov, *Characterizations of intervals via continuous selections*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **46** (1997), no. 2, 317–328, DOI:10.1007/BF02977032. MR 1617361
- [24] Mary Ellen Rudin, *A topological characterization of sets of real numbers*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1185–1186. MR 94774
- [25] Alan H. Schoenfeld and Gary Gruenhage, *An alternate characterization of the Cantor set*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), no. 1, 235–236, DOI:10.2307/2040405. MR 377836
- [26] Wacław Sierpiński, *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fundamenta Mathematicae **1** (1920), no. 1, 11–16, DOI:10.4064/fm-1-1-1-6.
- [27] W. J. Thron and Susan J. Zimmerman, *A characterization of order topologies by means of minimal T_0 -topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 161–167, DOI:10.2307/2037281. MR 283767
- [28] Jan van Mill, *Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **264** (1981), no. 1, 205–215, DOI:10.2307/1998420. MR 597877
- [29] ———, *Topological characterizations of separable metrizable zero-dimensional spaces*, Encyclopedia of General Topology, Elsevier, 2003, <https://staff.fnwi.uva.nl/j.vanmill/miscellaneous/ency.pdf>, pp. 334–336.
- [30] Jan van Mill and R. Grant Woods, *Perfect images of zero-dimensional separable metric spaces*, Canad. Math. Bull. **25** (1982), no. 1, 41–47, DOI:10.4153/CMB-1982-005-9. MR 657649
- [31] Benjamin Vejnar, *A topological characterization of the Sierpiński triangle*, Topology Appl. **159** (2012), no. 5, 1404–1408, DOI:10.1016/j.topol.2011.12.019. MR 2879369
- [32] A.J. Ward, *The topological characterisation of an open linear interval*, Proceedings of the London Mathematical Society **2** (1936), no. 1, 191–198,

DOI:10.1112/plms/s2-41.3.191.