

論文メモ

— 関数が肩身の狭い思いをする空間 —

ナンブ キトラ

2023 年 12 月 30 日

本棚を整理したいので、溜まっている論文のメモを書いて未来への手紙とすることにする。

以下の論文はおそらく、位相空間であって、その上の実連続関数が定数になってしまうものの例を調べようとして集めた論文だと思う。

1 論文たちの簡易な説明

神話. むかしむかし、どれくらい昔かということとソビエト連邦という今ではもう存在しないものが出来たてはやほやの時くらいに、ウリゾーンという数学者がいて(まあ夭折しちゃうわけだけでも・・・), ジェネトポのこといろいろ研究していて、正規空間の上には実連続関数がたくさんあるということを発見したわけ。これがウリゾーンの補題というやつ。どれくらい豊富かということと交わらない二つの閉集合を実連続関数を使って分離できるくらいある。そのような関数が豊富にある空間は最近だと正規よりちょっと弱い完全正則空間 (completely regular) というものが典型例だとみなされていると思う。完全正則空間というのは、任意の一点とそれを含まない閉集合を関数で分離できる程度には実連続関数が豊富ある空間で、実連続関数の情報だけから元の位相を復元できるし、一様付け可能性と同値だったりするしでかなり便利にいいように扱われていると思う。とにかく空間を与えた時にその上に豊富に連続関数があるのかどうか気になるわけなのだ。

ウリゾーンは論文 [18] で連結ハウスドルフ可算空間を構成したようだ。しかしながらドイツ語が読めないなのでこれは [6] の受け売りである。連結ハウスドルフ可算空間 X を考えて実連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の連結な可算空間でなければならないがそのような空間は一点集合しかないので f は必ず定数になってしまう。このように連結ハウスドルフ可算空間というのは関数が定数だけになる仕組みが大変分かりやすい空間

になっている (こういう話は [電波通信 1] にも書いた). ところで連結正則な可算空間は存在しないことに注意しよう. なぜなら可算空間は常にリンデレフでリンデレフ正則ならば正則空間になってしまうのでそれこそウリゾーンの補題から関数が豊富に存在することが示せてしまう. というわけでウリゾーンの補題から始まる数学の歴史はまあたくさんあるんだけど, とにかくそのうちの一つは関数が豊富にある空間を扱うような話に発展してそれは完全正則空間の話で, そしてまた一つは全く正反対の話, つまり関数が定数しかない空間はどのくらい複雑な位相的性質を許容できるのか? という話に発展したということである. 今回の論文の束はそういう関数が肩身の狭い思いをする空間のお話である. このような空間はコンパクトではない pseudo-compact 空間にもなっている. Pseudo-compact については [7] などを参照のこと. ただしこの本では空間は全て完全正則と仮定されている (それはそう) のでこの文章とは少々趣が異なる.

1.1 Hewitt

先にも登場したが, Hewitt の論文 [6] では Urysohn の次の二つの問題に答えている.

1. その上の実連続関数が常に定数になるような正則空間は存在するか?
2. 連結空間の最小濃度はどうなるか? 特に異なる 2 点についてこれら 2 点の交わらない二つ閉近傍で分離できるような (このような空間は Urysohn space と呼ばれている) 連結空間の最小濃度はどうなるのか?

Hewitt はこれらの問いに完全に答えた. 正則基数 κ を与えたときに (ここでの正則は空間の正則性と全然意味が違うのでややこしい), 濃度が κ であるような正則空間であってその上の実連続関数が定数になるような空間は存在する. 次に連結 Urysohn 空間の最小濃度は可算であることも証明している. つまり連結 Urysohn 可算空間が存在する. しかしながら Hewitt の構成はなんというかなんだか難しいと思う.

1.2 チェコ語の論文: 読めない

論文 [12] では正則空間であってその上の実連続関数が常に定数になるようなものを構成している. しかしながらこの論文はチェコ語で書かれており, とりあえず私には読めない. 一番後ろに英語のサマリーが載っているのでここだけ読めると思う. ちなみにこのサマリーによると Hewitt の論文の発表の前の 1948 年に空間の構成を得ていたが 1946 年という年の終わりに Hewitt の論文のゲラ刷り? が出回ったとか, Hewitt の論文は 1945 年に submit されてて, 結果として一年違いで同じ問いの解答を発見したことなどが書いて

いるが、異なる構成だし発表する価値があるだろうといったことが誠実に書かれている。優先権というものがありますからこういうことはちゃんと書いとかないといろいろ怒られますからね。しかしまあ、このお二方の構成はちょっと難しいかもしれない。

1.3 ジョーンズのお仕事とカラクリ (Jones Machine)

Jones [8] は連結、局所連結、完備な Moore 空間 λ_∞ であってある点 p では完全正則性が破綻するような空間を構成した。この空間の構成は Jones Machine と呼ばれるものの萌芽だと思うがちょっとよくわかんない。

Jones Machine (ジョーンズの機械/ジョーンズの機構/ジョーンズのカラクリ) について説明をしよう。Jones Machine という名前は M. E. Rudin による Jones の仕事の解説論文 [14] に現れている。元を辿るとこのジョーンズの機構は論文 [9] の構成だと思う。一体ジョーンズのカラクリとはなんなのか説明しよう。この論文 [9] では何か位相的性質 $\mathcal{P}$ をもつ非正規空間 X が存在した場合にその位相的性質 $\mathcal{P}$ を持つような非完全正則空間を構成する方法が与えられている。もちろん性質 $\mathcal{P}$ はなんでもいいというわけではないが、とにかくこの構成法が **Jones Machine(ジョーンズの機械/ジョーンズの機構/ジョーンズのカラクリ)** と呼ばれている。ざっくり解説すると非正規空間 X の開集合で分離できない二つの閉集合 H と K を固定する。そして X の可算個のコピーを考える。それらを X_i と書きその部分集合は下付きの添字 i をつけることにする。そして X_1 と X_2 は H_1 と H_2 を同一視して貼り合わせる。 X_2 と X_3 は K_2 と K_3 を貼り合わせる。そして無限遠点 ∞ を付け加えると H_i や K_i が関数で分離できないことが伝播して無限遠点 ∞ と閉集合 H_1 を分離する関数が存在しないことがわかるというカラクリである。それで実はこのように商を使って構成した空間が正則性を保つというのは位相空間論のいい話の一つ (フォークロア) だったと思う。そういう商の話は大体ブルバキに載ってる。またこの論文の問題意識は S-space や L-space という話に繋がったらしいがここら辺はよくわかんない。

また同じ論文 [9] で Jones は自然数ではなく整数で添字づけして両端にそれぞれ一つずつ合計二つの無限遠点 ∞_- と ∞_+ を付け加えた構成をすると、その空間の上の実連続関数 f について、 H_i と K_i が関数で分離できないということが伝播して $f(\infty_+) = f(\infty_-)$ が成り立つことを注意している。このように関数が特定の 2 点で定数になるような空間があると、えげつない貼り合わせで正則空間でその上の実連続関数が定数になるものが構成できる。これから出てくるサブセクションにもそういう構成が紹介されると思う。

論文 [13] は Jones の追悼論文だと思うが、Jones の業績に関していろいろ説明してく

れている。

1.4 Moore space ってなんだっけ

Armentrout は論文 [1] で Moore space であってその上の実連続関数が定数になるものを構成した。Moore space というのは正則空間であってなんか可算個の被覆の族があっていい感じの条件を満たすものである。とにかく正則空間である。

しかしながらこの空間は Jones の空間 [8] をさらにいじくって構成しているのでなかなか難しい。

1.5 一般の連続関数が定数になる空間

Herrlich の論文 [5] はドイツ語で書かれているので英訳されたものをサラッと読んだのだが、なんかすごい定理が証明されている。

定理 1 ([5]). Y を位相空間とする。この時以下は同値である。

- (a) Y は T_1 である。
- (b) 正則空間 X が存在して連続関数 $f: X \rightarrow Y$ は常に定数になる。

証明はなんかアレフナンバーを使うので難しく見える (かも)。

1.6 クラスルームノート

論文 [16] では正則だが完全正則ではない空間の例が構成されている。それは平面上の部分集合に変な位相を入れて仮想的な二つの無限遠点 p_+ と p_- からなる空間でこの空間の上の実連続写像は常に $f(p_+) = f(p_-)$ を満たすようなのでここから完全正則性を満たさないことがわかる。こういう空間のコピーをたくさん用意して任意の 2 点に対してその 2 点と p_+ と p_- を同一視してくっつけるという操作を可算回繰り返すと原理的にはその上の実連続関数が定数になるものが構成できる。はてなブログ [狐 1] にも説明があると思う。こういう話は [4] に載っている。特に任意の正則空間 Z を正則だがその上の実連続関数が定数になるような空間 $Q(Z)$ に位相的に埋め込めることも示している。論文 [19] もそういう話。

1.7 Younglove

ヤングラヴは [20] で局所連結な完備 Moore 空間でその上の実連続関数が定数に限るものを構成した。ちょっと構成はよくわかんなかった。

1.8 80 年代以降

ここからは 80 年代以降の話になる。

Mysior は論文 [11] で正則だが完全正則でない空間を構成した。その台集合は上半平面に一点余計な点 a を付け加えた空間である。変な位相を入れるとそういう空間になるのである。さらにその空間に点 b を付け加えていい感じに近傍を定義するとその拡張された空間のについては実連続関数は必ず $f(a) = f(b)$ を満たしてしまうのである。そして上で述べた話などから正則でその上の実連続関数が定数になる空間を作れるので結局 Urysohn の問いにある空間の簡単な構成が得られたことになる。今現在において正則関数であってその上の実連続関数が定数になってしまうものを構成したい場合には Mysior の論文 [11] の空間をフォローして、そういう空間を使う構成の [4] や [19] を適用すると一番手っ取り早いと思う。

論文 [10] はなんかよくわかんなかった。ほんとごめんなさい。正則性とコンパクト化についての研究らしい。

論文 [2] は Jones の論文 [9] の発展である。

論文 [15] は位相空間 X とその完全正則化について直積に関する可換性は成り立たないという論文である。位相空間の完全正則化というのは X のコゼロ集合から生成される位相をもつ空間である。多分マクレーンの“圏論の基礎”に書いてある別に完全正則じゃなくてもストーンチェックコンパクト化は考えられるよみたいな話の埋め込み (埋め込みじゃないけど) から誘導される位相空間だと思う。多分なんとか随伴関手とかになっていると思う。おそらくそういう話だと思う。ちょっとそこまで詳しくわかってない。

論文 [3] はタイトルの通りハウスドルフ空間 Y を与えると非自明な Moore 空間 X であって連続関数 $f: X \rightarrow Y$ はつねに定数になるものを構成している。Herrlich の論文 [5] の発展と見做せる。Herrlich の論文 [5] がよくわからなくていろいろ探してこの論文に行き着いたような記憶がある。

これはもう 90 年代の論文だが論文 [17] で Tzannes はハウスドルフな可算コンパクト空間であってその上の実連続関数が常に定数になってしまう例を構成している。これはコ

コンパクトハウスドルフなら正規でその上の連続関数は豊富にあるという話のコンパクト性を可算コンパクトに弱めると豊富さが損なわれるという話だと思う。

これ以外のものについてはこれらの論文の参考文献やこれらの論文を引用している論文を Google Scholar などで調べれば大体出てくるのではないかと思われる。

参考文献たち

はてなブログ

[電波通信 1] はてなブログ 電波通信の記事「連結ハウスドルフ可算空間」,
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2016/12/16/193128>

[狐 1] はてなブログ CommonNoun's diary の記事「Urysohn の距離化定理とその周辺
その 2」, <https://commonnoun.hatenadiary.jp/entry/2016/12/30/022732>

参考文献

- [1] Steve Armentrout, *A Moore space on which every real-valued continuous function is constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 106–109, DOI:10.2307/2034134. MR 120615
- [2] José L. Blasco, *The structure of non-completely regular spaces*, Topology Appl. **16** (1983), no. 2, 117–121, DOI:10.1016/0166-8641(83)90011-1. MR 712857
- [3] Harald Brandenburg and Adam Mysior, *For every Hausdorff space Y there exists a nontrivial Moore space on which all continuous functions into Y are constant*, Pacific J. Math. **111** (1984), no. 1, 1–8. MR 732053
- [4] T. E. Gantner, *A regular space on which every continuous real-valued function is constant*, Amer. Math. Monthly **78** (1971), 52–53, DOI:10.2307/2317489. MR 271902
- [5] Horst Herrlich, *Wann sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant?*, Math. Z. **90** (1965), 152–154, English translation is available at <http://msleziak.com/texty/translat/konstant.pdf>, DOI:10.1007/BF01112240. MR 185565
- [6] Edwin Hewitt, *On two problems of Urysohn*, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 503–509, DOI:10.2307/1969089. MR 17527

- [7] Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa, and Mikhail Tkachenko (eds.), *Pseudocompact topological spaces*, Developments in Mathematics, vol. 55, Springer, Cham, 2018, A survey of classic and new results with open problems, DOI:10.1007/978-3-319-91680-4. MR 3822332
- [8] F. Burton Jones, *Moore spaces and uniform spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 483–486, DOI:10.2307/2033011. MR 93757
- [9] ———, *Hereditarily separable, non-completely regular spaces*, Topology Conference (Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Va., 1973), Lecture Notes in Math., vol. Vol. 375, Springer, Berlin-New York, 1974, pp. 149–152. MR 413044
- [10] D. C. Kent and G. D. Richardson, *Completely regular and ω -regular spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), no. 4, 649–652, DOI:10.2307/2043789. MR 614896
- [11] A. Mysior, *A regular space which is not completely regular*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), no. 4, 652–653, DOI:10.2307/2044178. MR 601748
- [12] Josef Novák, *Regulární prostor na němž je každá spojitá funkce konstantní*(regular space on which every continuous function is constant), Časopis Pěst. Mat. Fys. **73** (1948), 58–68, available at <http://eudml.org/doc/26303>.
- [13] James T. Rogers, Jr., *F. Burton Jones (1910–1999)—an appreciation*, Proceedings of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT), vol. 24, 1999, pp. 2–14. MR 1802673
- [14] Mary Ellen Rudin, *The early work of F. B. Jones*, Handbook of the history of general topology, Vol. 1, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 85–96. MR 1617573
- [15] Petr Simon, *Completely regular modification and products*, Comment. Math. Univ. Carolin. **25** (1984), no. 1, 121–128. MR 749120
- [16] John Thomas, *Classroom Notes: A Regular Space, Not Completely Regular*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), no. 2, 181–182, DOI:10.2307/2317272. MR 1535290
- [17] V. Tzannes, *A Hausdorff countably compact space on which every continuous real-valued function is constant*, Topology Proc. **21** (1996), 239–244. MR 1489200
- [18] Paul Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. **94** (1925), no. 1, 262–295, DOI:10.1007/BF01208659. MR 1512258
- [19] Eric K. van Douwen, *A regular space on which every continuous real-valued func-*

- tion is constant*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **20** (1972), 143–145. MR 312462
- [20] J. N. Younglove, *A locally connected, complete Moore space on which every real-valued continuous function is constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 527–530, DOI:10.2307/2035691. MR 248741