

論文メモ

— 至る所微分不可能な連続関数 —

ナンブ キトラ

2024 年 1 月 8 日

この文章では連続だが至る所微分不可能な関数に関する論文のメモである。

このような関数について知りたい場合は大体 [31] と [14] を読めばいいと思う。日本語だと [和 1] もとても良いと思う。

この文章はほぼ論文に関するメモ書きなのだが数学っぽい議論を読みたい場合にはセクション 2 を読んでも良い。微分不可能関数の構成を行なっている。

1 本文

1.1 リーマンの関数

リーマンは関数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

について至る所微分不可能と言ったらしいが、結局いくつかの点では微分可能であることが証明されているようだ。リーマンの関数に関する論文は多分以下の通りである。論文 [19] [13], [8], [27], そして [28] を参照のこと。

1.2 ワイエルストラスの関数

ワイエルストラスの関数は以下の関数である。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x).$$

ここで $a \in (0, 1)$ であり, b は奇数である正の整数であり, さらに $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$ を満たすものである. 例えば $a = 1/2$ で $b = 73$ とすればこの条件を満たす. つまり

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(73^n \pi x)}{2^n}$$

は連続だが至る所部分不可能な関数である. ワイエルストラスの関数はなんか反例としてよく出てくるが, 別にワイエルストラスが最初にこういう例を構成したわけではないらしい (1875 に論文発表). 例えば [18] は 1830 年の論文でワイエルストラスより前らしい (今から数えると約 200 年前である). 数学書 [7] にはワイエルストラスの原論文と Kiesswetter の原論文の英訳が載っている. これ以外にもなんか色々あったような気がする. そういう細かい話は参考文献 [31] と [14] を参照のこと.

論文 [16] ではフーリエ級数みたいなフレーバーでワイエルストラス関数の微分不可能性を証明しているようだ. 論文 [9] ではワイエルストラスの関数の条件をちょっと改良したようだ.

数学書 [32] にも証明が載っている.

ワイエルストラス関数のグラフのハウスドルフ次元を計算する研究がある. 例えば [2] や [12] などを参照のこと.

論文 [和 5] にも原論文に沿った証明が紹介されている.

1.3 高木関数

今連続関数 $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $s(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ と定義する. つまり $s(x)$ は点 x と集合 $\mathbb{Z}$ の距離である. このとき高木関数 $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

と定義する. 高木貞治が構成したというこの至る所微分不可能な連続関数は大体以下の論文で触れられていると思う. 論文 [30] は高木の原論文で, 有名な解析概論 [和 4] の付録で高木関数が紹介されている.

1.4 その他

[5] でもそういう関数が扱われているようだがフランス語なので読めなかった. 論文 [6] では $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi\sqrt{-1}n^k x)}{n^\alpha}$ みたいな関数の可微分性やグラフの次元を考察しているようだ.

論文 [和 3] では $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!x)}{n!}$ が至る所微分不可能という証明が載っているらしいことが [和 1] に書いているがちょっと入手困難だった.

1.5 空間充填曲線

空間充填曲線と可微分性は [和 6] とか [23], [24], [25] を読めばいいと思う. ザーガンの本 [和 6] によれば至る所微分可能な関数は空間充填曲線になり得ないことが証明されているらしい. また [和 6] ではカントール集合を除いて微分可能な空間充填曲線が紹介されている.

1.6 範疇定理

至る所微分不可能な関数の存在性の範疇定理を使った証明は多分 [1] と [21] が最初だと思う.

論文 [15], [4], [20] などでも参照のこと.

多分 [26] も関係ある.

有名な方法なので一般の数学書にも記述がある. 数学書 [3] にも記述がある.

1.7 追記

論文 [22] では任意の可分距離空間を $C[0, 1]$ 内の至る所微分不可能な関数の集合に等長に埋め込めることが証明されている. 論文 [10] も参照のこと.

これ以外にも色々文献はあると思うが, これらの論文が引用している論文や, これらの論文を引用している論文を調べるといいと思う.

2 Appendix

せっかくだし実数上に連続だが微分不可能な関数が存在することを証明しよう. 講究録 [和 5] や [31] に記述されているワイエルストラスの方法などは可微分性に関してかなりギリギリを攻めているような嫌いがある. それは底が異なる指数関数の増大度を使って頑張っているということだが急増加数列を使ってオリジナルの方法をゆるゆるにしてみたものが以下である.

定理 1 (怠け者のためのワイエルストラス関数). 数列 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は正の実数列とし, 以下の条件を満たすとする.

(A1) 以下の収束が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \infty$$

(A2) 各 h_n は奇数であるような整数であり, なおかつ任意の n について h_{n+1} は h_n で割り切れる. 特に, $m > n$ のとき h_m は h_n の奇数倍である.

(A3) 以下の発散が成り立つ.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \frac{h_k}{r_k} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_n}{r_n} \right) = \infty.$$

このとき以下で定義される関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上連続だが, 全ての点において微分不可能である.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(h_i x)}{r_i}.$$

証明. まず条件 (A1) と M テストから f が連続であることがわかる.

今から f が至るところで可微分ではないことを証明しよう. 点 $p \in \mathbb{R}$ を任意に固定する. そして各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $L_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\frac{h_k p}{\pi}$ に一番距離が近い整数とし, u_k は $\frac{h_k p}{\pi} - L_k$ とする. このとき L_k の定義から $|u_k| \leq 1/2$ である. つまり

$$h_k p = (L_k + u_k) \pi$$

と $|u_n| \leq 1/2$ が成り立つような L_k と u_n をとる. そして $x_n \in \mathbb{R}$ を

$$x_n = \frac{1}{h_n} (L_n + 1) \pi$$

と定義する. もちろんこのとき

$$h_n x_n = L_n \pi + \pi = (L_n + 1) \pi$$

が成り立つ. このとき $|u_k| \leq 1/2$ から $x_k \neq p$ であることに注意しよう. また定義式から $n \rightarrow \infty$ のとき $|x_n - a| \rightarrow 0$ が成り立つ.

今 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意に固定して

$$S_k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(h_n x) - \cos(h_n a)}{r_n}$$

$$T_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cos(h_n x) - \cos(h_n a)}{r_n}$$

と定義すると $f(x_k) - f(a) = S_k + T_k$ となる．これから $|S_k|$ を上から評価し $|T_k|$ を下から評価していこう．

まずは $|S_k|$ を評価する．平均値の定理と任意の $x \in \mathbb{R}$ に関する不等式 $|\sin(x)| \leq 1$ を使うと関数 $\cos(x)$ は 1-Lipschitz であることがわかる．よって

$$|S_k| \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|\cos(h_n x_k) - \cos(h_n p)|}{r_i} \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|h_n x_k - h_n p|}{r_i} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i |x - p|}{r_n}$$

が成り立つ．このことから

$$|S_k| \leq |x_k - p| \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i}{r_i},$$

を得る．つまり

$$\frac{|S_k|}{|x_k - p|} \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i}{r_i}$$

がわかる．

次に $|T_k|$ を下から評価する．さて， $k \leq n$ となる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $I_k = h_n/h_k$ とすると仮定 (A2) から I_n は奇数であるような整数になる．よって

$$h_n p = I_n h_k p = I_n L_k \pi + I_n u_k \pi$$

かつ

$$h_n x_k = I_n h_k x_k = I_n (L_k + 1) \pi$$

である．ゆえに，加法定理と I_n が奇数であることから

$$\cos(h_n p) = (-1)^{L_k I_n} \cos(I_n u_k \pi) = (-1)^{L_k} \cos(I_n u_k \pi)$$

かつ

$$\cos(h_n x_k) = (-1)^{(L_n+1)I_n} \cos(0) = (-1)^{L_n+1}$$

である．よって $k \leq n$ となる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\frac{\cos(h_n x_k) - \cos(h_n p)}{r_n} = \frac{(-1)^{L_n+1} - (-1)^{L_n} \cos(I_n u_k \pi)}{r_n} = (-1)^{L_n+1} \times \frac{1 + \cos(I_n u_k \pi)}{r_n}$$

である．このことと，任意の $x \in \mathbb{R}$ について $1 + \cos(x) \geq 0$ であることから

$$|T_k| = \left| (-1)^{L_n+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1 + \cos(I_n u_k \pi)}{r_n} \right| = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1 + \cos(I_n u_k \pi)}{r_n}$$

となる (非負の数の和なので絶対値がちゃんと外れてくれる). 級数の各項は非負なのでさらに

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1 + \cos((I_n u_k \pi)}{r_n} \geq \frac{1 + \cos(u_k \pi)}{r_k}$$

を得る. ここで $|u_k| \leq 1/2$ なので $\cos(u_k \pi) \geq 0$ となる. ゆえに

$$\frac{1 + \cos(u_k \pi)}{r_k} \geq \frac{1}{r_k}.$$

を得る. 以上で述べた不等式から $|T_k| \geq 1/r_k$ を導くことができる. ここで $|u_k| \leq 1/2$ なので

$$|x_h - p| = \frac{1}{h_n} |u_n - 1| \pi \leq \frac{\pi}{2h_k}$$

がわかる. よって

$$\frac{|T_k|}{|x_k - p|} \geq \frac{2}{\pi} \frac{h_k}{r_k}$$

がわかる.

数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の任意性, 以上の $|S_k|$ と $|T_k|$ の評価と, 三角不等式

$$|f(x_k) - f(p)| \geq |T_k| - |S_k|$$

を用いると, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\left| \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} \right| \geq \frac{1}{|x_k - p|} (|T_k| - |S_k|) \geq \frac{2}{\pi} \frac{h_k}{r_k} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_n}{r_n}$$

がわかる. 仮定 (A3) から $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \frac{f(x_k) - f(p)}{x_k - p} \right| \rightarrow \infty$$

がわかる. つまり f は p で微分不可能である. 点 p の任意性から f は至る所微分不可能であることがわかる. $\square$

注意. 定理 1 の仮定 (A1), (A2), (A3) を満たす数列 h_n と r_n は存在する. 例えば以下のような例がある.

$$(1) \ r_n = (n+1)^2, \ h_n = (2n+1)!! \times 3^n$$

$$(2) \ r_n = (n+1)^2, \ h_n = 3^{3^n}$$

(3) $r_n = 2^n$, $h_n = 5^{n^2}$, ここで 2 と 5 というのは意味がある. これらの数字は $2 \times 2 < 5$ であることが重要である.

(4) $h_n = 3 \uparrow\uparrow (2n+1)$, $r_n = 3 \uparrow\uparrow (2n)$, ここで $\uparrow\uparrow$ はクヌースの二重矢印である.

(5) r_n を仮定 (A1) を満たす関数とし, $h_n = 3^{3^{\lfloor r_n \rfloor}}$ とする.

よって連続関数で至る所微分不可能な関数が存在することがわかる. 特に例えば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(5^{n^2} x)}{2^n}$$

などはそうである.

以上の定理 1 では賢く h_n が奇数であることをたくみに用いて T_k の下からの評価をしており, すごいけどめんどくさい. よってもっとガバガバにしよう.

定理 2 (ものぐさワイエルストラス関数). 正の実数からなる二つの数列 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, 及び正の実数 C は以下の条件を満たすとする.

(B1) 以下の収束が成り立つ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \infty.$$

(B2) 整数 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $k \geq N$ ならば以下の不等式が成り立つ

$$\frac{1}{r_k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{r_n} \geq C \cdot \frac{1}{r_k}.$$

この不等式から C は結構小さい正の数であることがわかる.

(B3) $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{C}{100} \frac{h_k}{r_k} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_n}{r_n} \rightarrow \infty$$

である.

このとき以下で定義される関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上連続だが, 全ての点において微分不可能である.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(h_i x)}{r_i}.$$

証明. まず条件 (B1) と M テストから f が連続であることがわかる.

今から f が至るところで可微分ではないことを証明しよう. 点 $p \in \mathbb{R}$ を任意に固定する. そして各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $L_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\frac{h_k p}{2\pi}$ に一番距離が近い整数とし, u_k は $\frac{h_k p}{2\pi} - L_k$ とする. このとき L_k の定義から $|u_k| \leq 1$ である. つまり

$$h_k p = 2L_k \pi + 2u_k \pi$$

と $|u_n| \leq 1$ が成り立つような L_k と u_n をとる (定理 1 と取り方が異なることに注意しよう).

さて今 $q \in \mathbb{R}$ を固定して関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(z) = |\cos(z) - \cos(q)|$ と定義する. このとき $g(q) = 0$ で $g(0) = |1 - \cos(q)| = 1 - \cos(q)$ かつ $g(\pi) = |-1 - \cos(p)| = 1 + \cos(p)$ なので $\cos(q)$ の符号がプラスか 0 の時は $g(\pi) \geq 1$ で $\cos(q)$ の符号がマイナスのときは $g(0) \geq 1$ である. よって g が周期 2π の関数であることを用いてさらに g に中間値の定理を適用すると点 z であり $z \in [0, 2\pi]$ を満たしなおかつ

$$|\cos(z) - \cos(q)| = 1$$

となるものが存在する (こういうのはグラフを書くとなんでこんな点が存在するのかよくわかる).

上の主張を $q = h_k p$ に適応すると, 点 $z_k \in [0, 2\pi]$ であって

$$|\cos(z_k) - \cos(h_k p)| = 1$$

となるものを得る. そして $x_n \in \mathbb{R}$ を

$$x_n = \frac{1}{h_n}(2L_n \pi + 10\pi + z_k)$$

と定義する. もちろんこのとき

$$h_n x_n = 2L_n \pi + 10\pi + z_k$$

が成り立つ. さらに z_k の定義と $\cos$ の周期が 2π であることから

$$|\cos(h_k x_k) - \cos(h_k p)| = 1$$

となることに注意しよう. また x_k の定義と $|u_k| \leq 1$ から $x_k \neq p$ であることに注意しよう (これを簡単に言うためにわざわざ x_k の定義式の中には 10π が足されている). また定義式および, u_k と z_k が有界であることから $n \rightarrow \infty$ のとき $|x_n - a| \rightarrow 0$ が成り立つ. 特に $|u_k| \leq 1$ と $0 \leq z_k \leq 2\pi$ から, かなりどんぶり勘定で評価して

$$0 < |x_k - p| \leq \frac{100}{h_k}$$

となる.

今 (B2) で述べられている $N \in \mathbb{Z}$ を取り $k \geq N$ となる $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を任意に固定して

$$S_k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(h_n x) - \cos(h_n p)}{r_n}$$

$$T_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cos(h_n x) - \cos(h_n p)}{r_n}$$

と定義すると $f(x_k) - f(a) = S_k + T_k$ となる. これから $|S_k|$ を上から評価し $|T_k|$ を下から評価していこう.

まずは $|S_k|$ を評価する. 平均値の定理と任意の $x \in \mathbb{R}$ に関する不等式 $|\sin(x)| \leq 1$ を使うと関数 $\cos(x)$ は 1-Lipschitz であることがわかる. よって

$$|S_k| \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|\cos(h_n x_k) - \cos(h_n p)|}{r_i} \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{|h_n x_k - h_n p|}{r_i} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i |x - p|}{r_n}$$

よって

$$|S_k| \leq |x_k - p| \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i}{r_i},$$

つまり

$$\frac{|S_k|}{|x_k - p|} \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_i}{r_i}$$

がわかる.

次に $|T_k|$ を下から評価する. さて, まず x_k の定義から

$$\left| \frac{\cos(h_k x_k) - \cos(h_k p)}{r_k} \right| = \frac{1}{r_k}$$

である. さらに $k+1 \leq n$ となる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ についての和について, $|\cos(z)| \leq 1$ の不等式を用いて

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\cos(h_n x_k) - \cos(h_n p)}{r_n} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{r_n}$$

の評価を得る. よって仮定 (B2) と三角不等式を使って

$$|T_k| \geq \frac{1}{r_k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{r_n} \geq C \cdot \frac{1}{r_k}$$

がわかる．つまり

$$\frac{|T_k|}{|x_k - p|} \geq \frac{C}{100} \frac{h_k}{r_k}$$

である．

数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の任意性，以上の $|S_k|$ と $|T_k|$ の評価と，三角不等式

$$|f(x_k) - f(p)| \geq |T_k| - |S_k|$$

を用いると， $k \geq N$ となる任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\left| \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} \right| \geq \frac{1}{|x_k - p|} (|T_k| - |S_k|) \geq \frac{C}{100} \frac{h_k}{r_k} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{h_n}{r_n}$$

がわかる．ゆえに仮定 (B3) から $k \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \frac{f(x_k) - f(p)}{x_k - p} \right| \rightarrow \infty$$

がわかる．つまり f は p で微分不可能である．点 p の任意性から f は至る所微分不可能であることがわかる． $\square$

注意． 定理 2 の仮定 (B1), (B2), (B3) を満たす数列 h_n, r_n 及び C は存在する．以下のような例がある (たぶん)． C は省略する．

- (1) $h_n = 2^{n!}, r_n = n!$,
- (2) $h_n = e^{e^{e^n}}, r_n = e^{e^n}$, e は自然対数の底．
- (3) $h_n = (n!)^{n!}, r_n = n^n$, ここで $0^0 = 1$ とする．
- (4) $h_n = 42^{n^5}, r_n = 3^{n^2}$
- (5) $h_n = 2 \uparrow \uparrow \uparrow n, r_n = 2 \uparrow \uparrow n$, 矢印の個数に注意．クヌースの記法である．

特に

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2^{n!}x)}{n!}$$

は至る所微分不可能関数である．

定理 2 の証明の議論ではもはや $\cos(x)$ 特有の性質，例えば加法定理などではなく，これが周期関数であること，連続であること (中間値の定理)，リプシッツであること，などしか用いていないので以下のように一般化できる．

定理 3 (難技者のワイエルストラス関数). 関数 $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期関数でリプシッツ関数であり, そして定数関数ではないとする. このとき適切に急増化する正の実数列 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して以下で定義される関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は至る所連続だが至る所微分不可能である.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w(h_n x)}{r_n}.$$

証明. 省略. 定理 2 と同様にできる. □

一つ注意点として $\mathbb{R}$ 上のリプシッツ関数はほとんど至る所微分可能であることに注意しよう. そういうある程度滑らかなものから微分不可能関数を作れるわけである.

定理 3 を適応できる関数で w であって $\cos x$ 以外のものは例えば $w(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ がある. この w から定義される上のような微分不可能関数は Takagi-type の関数と呼ばれているようである. 言うまでもないが高木の例は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w(2^n x)}{2^n}$ が微分不可能ということ述べており, 上の定理より具体的だし, 関数の外と内側で同じオーダーの数列を扱っているので高木の例の方が良い結果である. ワイエルストラスの例も同様である.

参考文献たち

和文参考文献

- [和 1] 徳永秀也 and 鹿野健, 「微分不可能な連続関数をめぐっての小史」津田塾大学第 3 回数学史シンポジウム, 1993, 65–76.
- [和 2] 河野敬雄, 「至る所微分不可能な連続関数を初めて理解した日本人は土木技術者だった」, 数理解析研究所講究録別冊 2023, B92: 57-76, <http://hdl.handle.net/2433/284815>
- [和 3] 徳永秀也, 「Riemann の三角級数の数論的研究」, 岡山大学大学院理学研究科修士論文, 1990.
- [和 4] 高木貞治, 「定本 解析概論」, 2010, 岩波書店, 補遺の解説: 黒田成俊.
- [和 5] 小柴洋一, 『Weierstrass 論文「至る所微分不可能である連続関数の例」について』, 数理解析研究所講究録 1195 (2001), 62–66. <http://hdl.handle.net/2433/64842>
- [和 6] H. ザーガン著, 鎌田清一郎訳空間充填曲線とフラクタル, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998 年

一般の参考文献

- [1] S. Banach, *Über die baire'sche kategorie gewisser funktionenmengen*, Studia Mathematica **3** (1931), no. 1, 174–179 (ger), <http://eudml.org/doc/217560>.
- [2] Krzysztof Barański, *Dimension of the graphs of the Weierstrass-type functions*, Fractal geometry and stochastics V, Progr. Probab., vol. 70, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015, pp. 77–91, DOI:10.1007/978-3-319-18660-3_5. MR 3558151
- [3] Ralph P. Boas, *A primer of real functions*, fourth ed., Carus Mathematical Monographs, vol. 13, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996, Revised and with a preface by Harold P. Boas. MR 1411907
- [4] Fabio Cavalletti, *A note on a residual subset of Lipschitz functions on metric spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **58** (2015), no. 3, 631–636, DOI:10.1017/S0013091514000261. MR 3391364
- [5] Charles Cellérier, *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Darboux Bull. **14** (1890), 142–160.
- [6] Fernando Chamizo and Antonio Córdoba, *Differentiability and dimension of some fractal Fourier series*, Adv. Math. **142** (1999), no. 2, 335–354, DOI:10.1006/aima.1998.1792. MR 1680194
- [7] Gerald A. Edgar (ed.), *Classics on fractals*, Studies in Nonlinearity, Westview Press. Advanced Book Program, Boulder, CO, 2004. MR 2049443
- [8] Joseph Gerver, *More on the differentiability of the Riemann function*, Amer. J. Math. **93** (1971), 33–41, DOI:10.2307/2373445. MR 276422
- [9] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), no. 3, 301–325, DOI:10.2307/1989005. MR 1501044
- [10] Stanislav Hencl, *Isometrical embeddings of separable Banach spaces into the set of nowhere approximatively differentiable and nowhere Hölder functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 12, 3505–3511, DOI:10.1090/S0002-9939-00-05595-7. MR 1707147
- [11] J. A. Hocutt and P. L. Robinson, *Everywhere differentiable, nowhere continuous functions*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), no. 10, 923–928, DOI:10.1080/00029890.2018.1517569. MR 3882060

- [12] Brian R. Hunt, *The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 791–800, DOI:10.1090/S0002-9939-98-04387-1. MR 1452806
- [13] Seiichi Itatsu, *Differentiability of Riemann's function*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **57** (1981), no. 10, 492–495. MR 640257
- [14] Marek Jarnicki and Peter Pflug, *Continuous nowhere differentiable functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2015, The monsters of analysis, DOI:10.1007/978-3-319-12670-8. MR 3444902
- [15] V. Jarník, *Über die differenzierbarkeit stetiger funktionen*, Fundamenta Mathematicae **21** (1933), no. 1, 48–58 (ger), <http://eudml.org/doc/212678>.
- [16] Jon Johnsen, *Simple proofs of nowhere-differentiability for Weierstrass's function and cases of slow growth*, J. Fourier Anal. Appl. **16** (2010), no. 1, 17–33, DOI:10.1007/s00041-009-9072-2. MR 2587578
- [17] Gerhard Keller, *A simpler proof for the dimension of the graph of the classical Weierstrass function*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **53** (2017), no. 1, 169–181, DOI:10.1214/15-AIHP711. MR 3606737
- [18] Karl Kiesswetter, *Ein einfaches Beispiel für eine Funktion, welche überall stetig und nicht differenzierbar ist*, Math.-Phys. Semesterber. **13** (1966), 216–221. MR 202936
- [19] Wolfram Luther, *The differentiability of Fourier gap series and “Riemann's example” of a continuous, nondifferentiable function*, J. Approx. Theory **48** (1986), no. 3, 303–321, DOI:10.1016/0021-9045(86)90053-5. MR 864753
- [20] R. Daniel Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions*, Pacific J. Math. **83** (1979), no. 1, 199–205. MR 555048
- [21] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Mathematica **3** (1931), no. 1, 92–94 (fre), <http://eudml.org/doc/217572>.
- [22] L. Rodríguez-Piazza, *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 12, 3649–3654, DOI:10.2307/2161889. MR 1328375
- [23] Hans Sagan, *Some reflections on the emergence of space-filling curves: the way it could have happened and should have happened, but did not happen*, J. Franklin Inst. **328** (1991), no. 4, 419–430, DOI:10.1016/0016-0032(91)90017-W. MR 1124993

- [24] ———, *An elementary proof that Schoenberg's space-filling curve is nowhere differentiable*, Math. Mag. **65** (1992), no. 2, 125–128, DOI:10.2307/2690494. MR 1160715
- [25] ———, *Space-filling curves*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994, DOI:10.1007/978-1-4612-0871-6. MR 1299533
- [26] S. Saks, *On the functions of besicovitch in the space of continuous functions*, Fundamenta Mathematicae **19** (1932), no. 1, 211–219 (eng), <http://eudml.org/doc/212573>.
- [27] A. Smith, *The differentiability of Riemann's functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 463–468, DOI:10.2307/2038391. MR 308337
- [28] Arthur Smith, *Correction to: "The differentiability of Riemann's function" [Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 463–468; MR0308337 (46 #7451)]*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), no. 3, 567–568, DOI:10.2307/2045519. MR 715889
- [29] Daochun Sun and Zhiying Wen, *The Hausdorff dimension of graph of a class of Weierstrass functions*, Progr. Natur. Sci. (English Ed.) **6** (1996), no. 5, 547–553. MR 1461263
- [30] Teiji Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative (誘導函数ヲ有セザル連續函数ノ簡單ナル例)*, Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku **1** (1901), F176–F177, DOI:10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176.
- [31] Johan Thim, *Continuous Nowhere Differentiable Functions*, Master's thesis, Luleå University of Technology, 2003, <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:ltu:diva-49636>.
- [32] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1958, Reprint of the second (1939) edition. MR 3155290