

連結ハウスドルフ可算空間

— 月の裏側 —

ナンブ キトラ

2023 年 12 月 15 日

月の裏側にはサンタクロースがいるらしい。見たことはないんだが信じたことはある。

ウリゾーンの補題の神話：ウリゾーンの補題というものは位相空間が正規ならば連続関数が豊富に存在するという定理であり、さらには特徴づけにもなっているので正規空間の性質を十分に反映している。ウリゾーンはこの補題を連続体 — この連続体という用語は古語であり、現代風にいうとコンパクト連結距離空間である — に対して始めて証明しその後正規空間に対して証明した。それではこの補題はなんの定理のための補題であったのだろうか。補題は何かの定理のための準備であり、それはまるで太陽の光を反射して輝く月である。太陽とは、連続体、すなわち連結コンパクト距離空間の濃度の決定であった。ウリゾーンは退化していない (2 点以上含む) 連続体の濃度が $2^{\aleph_0}$ となることを証明するためにウリゾーンの補題を証明したのであった。そのような連続体を X とすると 2 点以上含むのでウリゾーンの補題から X 上の連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して $\{0, 1\} \subset f(X)$ となるものが存在することに注意しよう。すると $f(X)$ は $[0, 1]$ の連結部分集合で然るべきなので $f(X) = [0, 1]$ となり、 $t \in [0, 1]$ に対して $f(p_t) = t$ となる p_t をとってくると X の濃度が下から $2^{\aleph_0}$ で抑えられることがわかる。上からの評価はまあ初等的であるから X の濃度が決定されるというわけである。ここでコンパクト性は X が正規であることを導出することのみに使われているので、上の証明においてコンパクト性を正規性に変えても下からの濃度の評価は変わらない。さて、正規空間の上の関数の豊富さと、それを利用した連続体の濃度の決定をしたウリゾーンはこの定理の「裏側」はどうなっているのか疑問に持ったのだろう。連結コンパクトな距離空間は必ず連続体濃度をもってしまい、それでは可算な連結ハウスドルフ空間は存在するのか？ という疑問にウリゾーンはたどり着いた。ここで補足をしていくと連結可算な**正則**空間は存在しないことに注意しよう。なぜならそのような空間は正規空間になり (一般にリンデレフかつ正則なら正規である)、上で述べた議論からその空間は連続体濃度以上の濃度持つからである。

月の裏側：そして実際にウリゾーンはそのような連結で可算な空間を構成したのである．ここで連結ハウスドルフ可算空間 X はウリゾーンの補題の正反対の性質を満たすことに注意しよう．つまり連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は常に定数である．このことは $f(X)$ が $\mathbb{R}$ の中で連結でありさらに可算集合であることからわかる． $\mathbb{R}$ の部分集合でそのようなものは一点集合しかない．よって連結ハウスドルフ空間は実連続関数が全然豊富ではない空間になっている．

この文章では連結ハウスドルフで可算な空間の構成に関する論文を紹介していく．

1 本文

全部を読んだわけでもないし、読んだとしても詳細に読んだわけではないが、ささやかながら連結ハウスドルフ可算空間に関する論文を紹介していく．

1.1 概要

連結ハウスドルフ可算空間は、ドイツ語が読めなくて、この文章の筆者は読んでいないが [35] によって初めて構成されたいらしい．

参考文献の中にある論文の中で一番簡単な構成は [5] だと思う．手短に連結ハウスドルフ可算空間の存在を実感したいのであれば、これを読むと良い．これはまた、いわゆる 1 ページ論文でもある．Bing は上半平面の可算稠密集合におおよそ x 軸上にあるへんな近傍系を定義して連結ハウスドルフ可算空間を構成した．

位相空間が Urysohn 空間であるとは、異なる二点に対し各々の交わらないような閉近傍が存在することを言う．論文 [14] ではウリゾーンが構成したものより条件を強めて連結な Urysohn 空間でかつその上の実連続関数が常に定数となるような可算空間を構成している．

1.2 整数上の位相

次に整数の上に連結ハウスドルフ可算空間を構成した論文を紹介したい．その前に Furstenberg の素数の無限性の証明というものに言及せざるを得ない．Furstenberg [10] は整数の上に等差数列を使った位相を導入し、その位相空間 F の性質を使って素数の無限性を証明した．この Furstenberg の空間 F は 0 次元なので全然連結ではないことに注意しよう．また F は距離化可能空間であることにも注意しよう．有理数の集合の位相的特徴づけを用いると F は $\mathbb{Q}$ と同相であることがわかる．全然連結ではない．論文 [21] で

はこの空間 F の上の具体的な距離を導入している．その距離は言うなれば “ $n!$ -進距離” のようなものでちょっと面白い (多分 [22] はこの論文のプレプリント)．さてそれを踏まえた上で，Furstenberg により等差数列を使うと $\mathbb{Z}$ 常に変な位相が導入できることがわかったのだが，その方向性で研究をした人たちがいた．Brown [8] と Golomb, [12] による構成も鮮やかで，整数の上に件の条件を満たす位相を構成している．論文 [11] や [9] も参照のこと．連立合同方程式に関する知識があればその構成はよく理解できると思う．Kirch [19] は彼らの構成をもう一步推し進めて局所連結性をも充たす連結ハウスドルフ位相を整数の上に構成している．おそらくこの整数の上の奇妙な諸位相に関する話題はもはや一大分野を築けるくらいに膨れ上がっているのかも知れない．

1.3 コホモロジー論

一般にパラコンパクトハウスドルフ空間に関しては $H^1(X; \mathbb{Z}) \approx [X, S^1]$ が成り立つことが知られている．ここで $H^1(X; \mathbb{Z})$ は X の一次コホモロジーで， $[X, S^1]$ は X から円周 S^1 への連続写像のホモトピー同値類からなる群である．論文 [7] では，上で述べた同型にはパラコンパクトという条件が外せないことを示している．論文 [7] の本文ではないけれども，リマークにおいて連結ハウスドルフ可算空間 Y から輪っかを作るような構成で Y' という別の連結ハウスドルフ可算空間を構成してそれが $H^1(Y'; \mathbb{Z}) \approx [Y', S^1]$ を満たすことを述べている．また論文 [25] では上で構成された Y' の詳細な分析を行なっているらしいが，どうやらスペイン語で書かれているらしく，しかも掲載雑誌も手に入りづらい感じなので，この文章の筆者は未確認である．

1.4 追記

他の論文については詳細に読んでないので省略する．この参考文献以外にもなぜだか知らないが連結ハウスドルフ可算空間に関する論文はたくさんあることに留意されたい．

参考文献

- [1] Ofelia T. Alas and Richard G. Wilson, *Constructing weaker connected Hausdorff topologies*, *Topology Proc.* **35** (2010), 225–232. MR 2534786
- [2] José del Carmen Alberto-Domínguez, Gerardo Acosta, and Gerardo Delgadillo-Piñón, *Totally Brown subsets of the Golomb space and the Kirch space*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **63** (2022), no. 2, 189–219. MR 4506132

- [3] Iryna Banakh, Taras Banakh, Olena Hryniv, and Yaryna Stelmakh, *The connected countable spaces of Bing and Ritter are topologically homogeneous*, Topology Proc. **57** (2021), 149–158. MR 4127728
- [4] Taras Banakh and Yaryna Stelmakh, *Examples of strongly rigid countable (semi)Hausdorff spaces*, Topology Proc. **62** (2023), 179–196. MR 4614765
- [5] R. H. Bing, *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 474, DOI:10.2307/2032155. MR 60806
- [6] Stephanie M. Boyles and Gerhard X. Ritter, *A connected locally connected countable space which is almost regular*, Colloq. Math. **46** (1982), no. 2, 189–195, DOI:10.4064/cm-46-2-189-195. MR 678133
- [7] Glen E. Bredon, *A space for which $H^1(X; Z) \approx [X, S^1]$* , Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 396–398, DOI:10.2307/2035536. MR 224086
- [8] M. Brown, *A countable connected hausdorff space*, Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 367, inside *The April meeting in New York*.
- [9] Pete L. Clark, Noah Lebowitz-Lockard, and Paul Pollack, *A note on Golomb topologies*, Quaest. Math. **42** (2019), no. 1, 73–86, DOI:10.2989/16073606.2018.1438533. MR 3905659
- [10] Harry Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 353, DOI:10.2307/2307043. MR 68566
- [11] S. W. Golomb, *Arithmetica topologica*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), Academic Press, New York-London, 1961, pp. 179–186. MR 154249
- [12] Solomon W. Golomb, *A connected topology for the integers*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 663–665, DOI:10.2307/2309340. MR 107622
- [13] William Gustin, *Countable connected spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 101–106, DOI:10.1090/S0002-9904-1946-08512-2. MR 14801
- [14] Edwin Hewitt, *On two problems of Urysohn*, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 503–509, DOI:10.2307/1969089. MR 17527
- [15] S. Iliadis and V. Tzannes, *Spaces on which every continuous map into a given space is constant*, Canad. J. Math. **38** (1986), no. 6, 1281–1298, DOI:10.4153/CJM-1986-065-1. MR 873413
- [16] F. B. Jones and A. H. Stone, *Countable locally connected Urysohn spaces*, Colloq. Math. **22** (1971), 239–244, DOI:10.4064/cm-22-2-239-244. MR 283764

- [17] V. Kannan, *A countable connected Urysohn space containing a dispersion point*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 289–290, DOI:10.2307/2038489. MR 296908
- [18] V. Kannan and M. Rajagopalan, *On countable locally connected spaces*, Colloq. Math. **29** (1974), 93–100, 159, DOI:10.4064/cm-29-1-93-100. MR 339068
- [19] A. M. Kirch, *A countable, connected, locally connected Hausdorff space*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 169–171, DOI:10.2307/2317265. MR 239563
- [20] Józef Krasinkiewicz, Mirosław Reńska, and Mirosław Sobolewski, *Countable connected spaces and bunches of arcs in $\mathbf{R}^3$* , Topology Appl. **153** (2006), no. 8, 1249–1270, DOI:10.1016/j.topol.2004.12.009. MR 2202851
- [21] Rezső L. Lovas and István Mező, *Some observations on the Furstenberg topological space*, Elem. Math. **70** (2015), no. 3, 103–116, DOI:10.4171/EM/283. MR 3372067
- [22] Rezső L. Lovas and István Mező, *On an exotic topology of the integers*, arXiv preprint arXiv:1008.0713 (2010).
- [23] Joseph Martin, *A countable Hausdorff space with a dispersion point*, Duke Math. J. **33** (1966), 165–167. MR 192474
- [24] Joseph M. Martin, *Homogeneous countable connected Hausdorff spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 308–314, DOI:10.2307/2034328. MR 124871
- [25] George J. Michaelides and Ignacio Bello, *A countable and connected Hausdorff space whose first Čech cohomology group is isomorphic to $\mathbb{Z}$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **15** (1970), 7–13. MR 367974
- [26] Gary Miller and B. J. Pearson, *On the connectification of a space by a countable point set*, J. Austral. Math. Soc. **13** (1972), 67–75. MR 292039
- [27] Gary Glenn Miller, *Countable connected spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 355–360, DOI:10.2307/2036404. MR 263005
- [28] Piotr Minc, *Countable connected Hausdorff and Urysohn bunches of arcs in the plane*, Topology Appl. **153** (2006), no. 11, 1895–1916, DOI:10.1016/j.topol.2005.06.017. MR 2227035
- [29] R. G. Ori and M. Rajagopalan, *On countable connected locally connected almost regular Urysohn spaces*, Topology Appl. **17** (1984), no. 2, 157–171, DOI:10.1016/0166-8641(84)90039-7. MR 738944
- [30] Gerhard X. Ritter, *A connected, locally connected, countable Urysohn space*, General Topology and Appl. **7** (1977), no. 1, 65–70. MR 433381

- [31] Prabir Roy, *A countable connected Urysohn space with a dispersion point*, Duke Math. J. **33** (1966), 331–333. MR 196701
- [32] V. Tzannes, *Three countable connected spaces*, Colloq. Math. **56** (1988), no. 2, 267–279, DOI:10.4064/cm-56-2-267-279. MR 991215
- [33] ———, *Two countable Hausdorff almost regular spaces every continuous map of which into every Urysohn space is constant*, Internat. J. Math. Math. Sci. **14** (1991), no. 4, 709–714, DOI:10.1155/S0161171291000959. MR 1125421
- [34] ———, *A countable widely connected Hausdorff space*, Topology Appl. **69** (1996), no. 1, 63–70, DOI:10.1016/0166-8641(95)00072-0. MR 1378388
- [35] Paul Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. **94** (1925), no. 1, 262–295, DOI:10.1007/BF01208659. MR 1512258
- [36] Eldon J. Vought, *A countable connected Urysohn space with a dispersion point that is regular almost everywhere*, Colloq. Math. **28** (1973), 205–209, DOI:10.4064/cm-28-2-205-209. MR 326655