

Baire 空間

ナンプ キトラ

2023 年 12 月 18 日

この文章では Baire space の基本的性質を紹介する.

1 基本事項

定義 1. 位相空間 X が *Baire* であるとは, X の稠密可算開集合族 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について, その共通部分 $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ が X の稠密部分集合になっているときにいう.

定義 2. X の部分集合 A が**疎**であるとは, $\text{Int}(\text{Cl}(A)) = \emptyset$ となることである.

定義 3. X の部分集合 A が**第一類集合**であるとは, X の疎な集合列 $\{Z_i\}$ が存在して $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ となることである.

定義 4. X の部分集合 A が**第二類集合**であるとは, A が第一類集合でないときにいう. これは, 任意の集合列 $\{Z_i\}$ に対して, $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ ならば, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{Int}(\text{Cl}(Z_n)) \neq \emptyset$ となることと同値である.

定義 5. X の部分集合 A が **comeager** であるとはそれが第一類集合の補集合であることである. これは稠密開集合の可算族 $\{U_i\}_{i \in \omega}$ が存在して A が共通部分 $\bigcap_{i \in \omega} U_i$ を含んでいると言い換えてもいい.

補題 6. 閉集合もしくは開集合の境界は疎な集合である.

証明. A を閉集合とする. $\text{Bdry}(A)$ は閉集合であり, $\text{Bdry}(A) \subset A$ となることに注意せよ. もし開集合 V が存在して, $V \subset \text{Bdry}(A)$ ならば, $V \subset \text{Int}(A)$ であり, これは $\text{Bdry}(A) \cap \text{Int}(A) = \emptyset$ に反する. よって $\text{Bdry}(A)$ は疎である. また, 開集合 U の境界 $\text{Bdry}(U)$ については, $\text{Bdry}(U) = \text{Bdry}(X \setminus U)$ なので, 上の場合に帰着する. $\square$

命題 7. X が *Baire* 空間であることと, X の任意の非空な開集合が第二類集合であることは同値である.

証明. X は第一類集合となる開集合が存在すると仮定し, X が *Baire* ではないことを証明する. U を X の第一類の開集合とする. U は第一類なので, ある疎な集合の列 $\{Z_i\}$ が存在して, $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ とかける. さて, $O_i = (X \setminus \text{Bdry}(U)) \cap (X \setminus \text{Cl}(Z_i))$ と置くと, $X \setminus O_i = \text{Bdry}(U) \cup \text{Cl}(Z_i)$ は疎な閉集合なので, O_i は稠密な開集合である. $U = \bigcup_i Z_i$ なので, $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_i) \cap U = \emptyset$ である. U は開集合なので, 特に $\bigcap_i O_i$ は稠密ではない. つまり X は *Baire* ではない.

逆に X の任意の非空な開集合が第二類と仮定する. X の稠密開集合の列 U_i を考える. $Z_i = X \setminus U_i$ とすると, Z_i は疎な閉集合である. X の任意の開集合 O をとると, これは第二類なので, 特に $O \neq \bigcup_i (Z_i \cap O)$ である. つまり, $O \setminus \bigcap_i Z_i \neq \emptyset$ ということなので, $O \cap \bigcap_i U_i \neq \emptyset$ である. つまり, $\bigcap_i U_i$ は稠密なので X は *Baire* である. $\square$

命題 8. X を *Baire* 空間とする. このとき X の空でない開集合 U はそれ自体が *Baire* 空間である.

証明. U の開集合は X の開集合でもあることから従う. $\square$

命題 9. X を *Baire* 空間とする. このとき X の稠密な G_δ 集合 S はそれ自体が *Baire* 空間である.

証明. S の可算個の稠密開集合 $\{U_i\}_{i \in \omega}$ について $V_i \cap S = U_i$ となる X の開集合 V_i が存在する. このとき V_i は X の稠密部分集合である. よって $S \cap \bigcap_{i \in \omega} V_i = \bigcap_{i \in \omega} U_i$ は X の可算個の稠密 G_δ 集合の共通部分なので X が *Baire* であることからこれは X の中で稠密である. よって $\bigcap_{i \in \omega} U_i$ は S でも稠密であるから S が *Baire* 空間であることがわかる. $\square$

2 被覆と Baire 空間

X の被覆 $\mathcal{U}$ に対して

$$D(\mathcal{U}) = \{x \in X \mid \mathcal{U} \text{ は } x \text{ において局所有限}\}$$

と定義する. 局所有限性の定義から, $D(\mathcal{U})$ は開集合である.

定理 10 ([5]). X を位相空間とする. このとき以下は同値

- (1) X は Baire
- (2) X の点有限被覆 $\mathcal{U}$ について $D(\mathcal{U})$ は X において稠密
- (3) X の点有限可算被覆 $\mathcal{U}$ について $D(\mathcal{U})$ は X において稠密

証明. [(1) $\implies$ (2) の証明]

X の任意の非空な開集合 O について $O \cap D(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ を示せば良い. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$F_n = \{x \in O \mid \text{ord}(x, \mathcal{U}) \leq n\}$$

と定義する. 各 F_n は閉集合である事を示そう. $x \notin F_n$ をとる. このとき $\text{ord}(x, \mathcal{U}) \geq n+1$ なので, $n+1$ 個の $\mathcal{U}$ の元 $U_1, \dots, U_{n+1}$ が存在してこれらは全て x を含む. $P = \bigcap_{i=1}^{n+1} U_i$ とすると任意の $y \in P$ について $\text{ord}(y, \mathcal{U}) \geq n+1$ なので $y \notin F_n$ である. つまり $P \subset X \setminus F_n$ であり $x \in X \setminus F_n$ は任意であったから F_n は閉集合になる. さて $\mathcal{U}$ は点有限被覆なので, $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ である. O は開集合であり, X が Baire であることから, ある $n \in \mathbb{N}$ について, F_n は内点を持つ. $W = \text{int}(F_n)$ としよう. 次を満たす $y \in W$ をとる. $\text{ord}(y, \mathcal{U}) = \max\{\text{ord}(x, \mathcal{U}), x \in W\}$. これは F_n の定義から可能である.

$m = \text{ord}(y, \mathcal{U})$ として, $U_1, U_2, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ は y を含むとしよう. $V = W \cap \bigcap_{i=1}^m U_i$ と置く. $m = \text{ord}(y, \mathcal{U}) = \max\{\text{ord}(x, \mathcal{U}), x \in W\}$. なので, V の元は $U_1, U_2, \dots, U_m$ 以外の $\mathcal{U}$ の元と交わらない. つまり, $y \in D(\mathcal{U})$ である. $y \in V \subset O$ なので, $O \cap D(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ である.

[(1) $\implies$ (2) の証明終わり]

[(2) $\implies$ (3) の証明]

自明

[(2) $\implies$ (3) の証明終わり]

[(3) $\implies$ (1) の証明]

対偶を示す. X は Baire ではないので, 非空な開集合 U が存在して, 可算個の疎な集合 K_i を用いて, $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ とかける. ここで, $K_i \subset K_{i+1}$ と仮定しても良い.

$U_i = U \setminus \text{Cl}(K_i)$ と定義し,

$$\mathcal{U} = \{X\} \cup \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

と定義する. $\mathcal{U}$ は点有限可算開集合族である. ここでもし, U の部分集合であるような開集合 O が $\mathcal{U}$ の有限個の元としか交わりを持たないとすると, 十分大きい番号 N で $O \cap U_N = \emptyset$ となる. 集合 U_N の定義から, $O \subset \text{Cl}(K_N)$ となるが, K_N は疎であるか

らこれは矛盾である．よって $D(U) \cap U = \emptyset$. 特に $D(U)$ は稠密ではない．

[(3) $\implies$ (1) の証明終わり]

以上で定理の証明が終わる． □

注意. 定理 10 は [1] からの引用であるが、[1] では $F_n = \{x \in O \mid \text{ord}(x, U) = n\}$ として証明をしている．この場合は F_n が閉集合になるかどうかいまいち不明なので証明が少々煩雑になると思われる．

3 Banach-Mazur game と Baire 空間

位相空間 X の開集合からなる部分集合族 $\mathcal{P}$ が π -基底であるとは、 $\emptyset \notin \mathcal{A}$ でありなおかつ任意の開集合 O について $V \in \mathcal{P}$ が存在して $V \subset O$ となることである．

定義 11 (Language of Banach-Mazur game). $\mathcal{A}$ を X の π -基底とする． $n \in \omega$ に対して

$$\downarrow^n(\mathcal{A}) = \{(A_i)_{i \in n} \in \mathcal{A}^n \mid A_{i+1} \subset A_i\}$$

とする．つまりこの集合というのは $\mathcal{A}$ の元からなる要素 n 個の減少列全体の集合である．*Banach-Mazur game* においては $\downarrow^n(\mathcal{A})$ の元というのは第 n ターン目の盤面を表していると考えられる．特に $\downarrow^0(\mathcal{A}) = \{\emptyset\}$ である．また、 $n \in \omega + 1$ に対して

$$\downarrow^{<n}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in n} \downarrow^i(\mathcal{A})$$

と定義する．

そして、 $n \in \omega + 1$ に対して、

$$\mathfrak{S}_n(\mathcal{A}) = \{f \in \text{Map}(\downarrow^{<n}(\mathcal{A}), \mathcal{A}) \mid \forall h \in n \ \forall \sigma \in \downarrow^h(\mathcal{A}) \ f(\sigma) \subset \sigma(h-1)\}$$

と定義する．つまり $\mathfrak{S}_n(\mathcal{A})$ の元というのは $\downarrow^{<n}(\mathcal{A})$ のそれぞれに対して一様に何かしらの $\mathcal{A}$ の元を選ぶ操作のことである．そしてその選び方というのは $\sigma \in \downarrow^h(\mathcal{A})$ を拡張するように選ばれる、つまり $f(\sigma) \subset \sigma(h-1)$ を満たしていなければならない．

集合 $\mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ の元を**戦略**と呼ぶ．

二つの戦略の対 (f, g) について、 $[f, g]_i$ を以下のように定義する． $i = 0$ のとき

$$[f, g]_0 = f(\emptyset).$$

とし、 $i > 0$ のときは以下のようにする． i が奇数のとき

$$[f, g]_i = g([f, g]_0, \dots, [f, g]_{i-1})$$

で i が偶数の時

$$[f, g]_i = f([f, g]_0, \dots, [f, g]_{i-1})$$

と定義する.

定義 12 (Banach-Mazur Game). 今から位相的ゲームを定義するが, これは位相空間の部分集合をプレイヤー α と β が交互に小さくなるように集合をとっていくある種の陣取りゲームである. このとき一般的にプレイヤー α が勝つとはその集合列の共通部分が空でないことで, プレイヤー β が勝つとは, その共通部分が空のときである.

$\text{BM}(X, \mathcal{A}, \alpha)$ を X を盤, $\mathcal{A}$ を駒とした α 先行の *Banach-Mazur game* という.

$\text{BM}(X, \mathcal{A}, \beta)$ を X を盤, $\mathcal{A}$ を駒とした β 先行の *Banach-Mazur game* という.

「プレイヤー α が $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \alpha)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \forall g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i \neq \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー α が $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \forall f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i \neq \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー β が $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \alpha)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \forall f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i = \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー β が $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \forall g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A}) \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i = \emptyset$$

が成り立つことである.

必勝戦略を持つというのはとても強い条件である. というのも, 何かしらの戦略, あるいはアルゴリズムといってもいいが, それに従ってさえいけば相手がどのように行動しようとも絶対勝てるというある意味で様な戦略が存在するという事を意味する.

プレイヤー α が必勝戦略を持たないとは, プレイヤー β が α の戦略のそれぞれに対応した勝利戦略を取れるということであるともいえる. 逆もしかり.

定義 13 (Banach-Mazur* Game). 位相空間 X の π 基底 $\mathcal{A}$ について

$$\text{Mon}(\mathcal{A}) = \{f \in \text{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A} \ f(A) \subset A\}$$

と定義する. このとき $f \in \text{Mon}(\mathcal{A})$ に対して戦略 $J(f) \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ を第 n ターン盤面 $\sigma \in \downarrow^n(\mathcal{A})$ に対して $J(f)(\sigma) = f(\sigma(n-1))$ と定義する. この $J(f)$ は f から誘導される自然な戦略である.

このとき対 $(f, g) \in \text{Mon}(\mathcal{A})^2$ について, $[f, g]_i$ を $[J(f), J(g)]_i$ として定義する. つまり f と $J(f)$ を自然に同一視して定義するということである.

Banach-Mazur game において戦略の取り方を $\text{Mon}(\mathcal{A})$ の元から誘導されるものだけに限定したゲームを *Banach-Mazur* game* と呼ぶことにしよう.

$\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \alpha)$ を X を盤, $\mathcal{A}$ を駒とした α 先行の *Banach-Mazur* game* という.

$\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ を X を盤, $\mathcal{A}$ を駒とした β 先行の *Banach-Mazur* game* という.

BM と BM^* の違いは, BM が第 n 手においてそれ以前の全ての情報を使うことができるのに対して, BM^* は相手の直前の $n-1$ 手の情報しか参照できないところである.

「プレイヤー α が $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \alpha)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists f \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \forall g \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i \neq \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー α が $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists g \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \forall f \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i \neq \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー β が $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \alpha)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists g \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \forall f \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i = \emptyset$$

が成り立つことである.

「プレイヤー β が $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持つ」とは,

$$\exists f \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \forall g \in \text{Mon}(\mathcal{A}) \ \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i = \emptyset$$

が成り立つことである.

プレイヤー α が必勝戦略を持たないとは, プレイヤー β α の戦略それぞれに対応した勝利戦略を持つともいえる. 逆もしかり.

定義 14. X を位相空間とし $\mathcal{A}$ はその π -基底とする. そして $f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ と $n \in \omega$ をとる. このとき列 $\sigma \in \downarrow^n(\mathcal{A})$ が f -適合的であるとは $\tau_{f,\sigma}$ を

$$\tau_{f,\sigma}(0) = f(\emptyset)$$

と定義し, $i \in \{0, \dots, n\}$ について

$$\tau_{f,\sigma}(2i+1) = \sigma(i)$$

かつ

$$\tau_{f,\sigma}(2i) = f(\tau_{f,\sigma}(0), \dots, \tau_{f,\sigma}(2i-1))$$

と定義したとき, $\tau_{f,\sigma} \in \downarrow^{2n+1}(\mathcal{A})$ となるときにいう. f 適合的な列全体を $AC_f^n(\mathcal{A})$ と書くことにする.

次の補題が基本的である.

補題 15. X を位相空間とし $\mathcal{A}$ はその π -基底とする. そして $f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ を任意にとる. 以下のような族 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \omega}$ が存在する.

- (1) $\mathcal{F}_i$ は $AC_f^i(\mathcal{A})$ の部分集合である.
- (2) 各 $\mathcal{F}_i$ の任意の異なる二元 σ と γ について $\sigma(i)$ と $\gamma(i)$ は互いに交わらない.
- (3) 各 $i \in \omega$ と任意の $\sigma \in \mathcal{F}_{i+1}$ について $\gamma \in \mathcal{F}_i$ が存在して $\sigma|_i = \gamma$ となる.
- (4) 各 $i \in \omega$ について

$$U_i = \bigcup \{f(\tau_{f,\sigma}) \mid \sigma \in \mathcal{F}_i\}$$

と定義する. このとき U_{i+1} は U_i の中で稠密である.

証明. 帰納的に構成する. $\mathcal{F}_0$ は条件 (1) と (2) を満たすような包含関係について極大な族とする. $i \in \omega$ を固定し $\mathcal{F}_i$ がすでに構成されているとする. このとき $\mathcal{F}_{i+1}$ を構成しよう. $\mathcal{F}_{i+1}$ は条件 (1)–(3) を満たすもののうち, 包含関係について極大なものとする. これは Zorn の補題から存在が示される. 条件 (4) を確かめよう. もしも U_{i+1} が U_i の中で稠密ではないとするとある空ではない開集合 O が存在して $O \subset U_i$ と $O \cap U_{i+1} = \emptyset$ を満たす. U_i の定義と $\mathcal{A}$ が π -基底であることから O を小さく取り直してある $\sigma \in AC_f^i(\mathcal{A})$ が存在して $O \subset f(\tau_{f,\sigma})$ かつ $O \in \mathcal{A}$ を満たすと仮定しても良い. そして γ を $\gamma = (\sigma(0), \dots, \sigma(i), O)$ とすると $\gamma \in AC_f^{i+1}(\mathcal{A})$ であり $\mathcal{F}_{i+1} \sqcup \{\gamma\}$ は $\mathcal{F}_{i+1}$ を真部分集合として含み, (1)–(3) をすべて満たす. これは $\mathcal{F}_{i+1}$ の極大性に矛盾するので U_{i+1} は U_i の中で稠密である. $\square$

定理 16. X を位相空間とし, X の π -基底を一つ固定し $\mathcal{A}$ とする. このとき以下は同値である.

- (1) X は Baire 空間である.
- (2) β は $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持たない.
- (3) β は $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において必勝戦略を持たない.

証明. 各々頑張って証明する.

[(1) $\implies$ (2)]

プレイヤー β が必勝戦略を持たないことを示すために $f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ を任意にとる. これは β の戦略を任意に与えるということである. 各 $i \in \omega$ について U_i は補題 15 に述べられているものとする. すると補題 15 から U_i は U_0 の中で稠密であることがわかる. X が Baire なので U_0 も Baire になり, $\bigcap_{i \in \omega} U_i$ は U_0 のなかで稠密であることがわかる. 適当に $x \in \bigcap_{i \in \omega} U_i$ をとる. すると各 $i \in \omega$ について $\sigma_i \in \text{AC}_f^i(\mathcal{A})$ が存在して $x \in f(\tau_{f, \sigma})$ である. ここで U_i の定義と補題 15 の条件 (3) から任意の $k \leq i$ について $\sigma_i(k) = \sigma_{i+1}(k)$ となる. よってこれらから無限列 $\Sigma(0), \dots, \Sigma(i), \dots$ が決定される. この無限列を Σ とかこう. $g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ を以下のように定義する. $\sigma \in \downarrow^n(\mathcal{A})$ が $\tau_{f, \Sigma|_i}$ の形をしているならば

$$g(\sigma) = \Sigma(i+1)$$

と定義し, その他の場合には

$$g(\sigma) = \sigma(n-1)$$

と定義すると g はちゃんと $\downarrow^{<\omega}(\mathcal{A})$ から $\mathcal{A}$ への写像になっている. この時, $[f, g]_i$ を並べた無限列はについて,

$$[f, g]_{2i+1} = \Sigma(i)$$

であるから

$$x \in \bigcap_{i \in \omega} [f, g]_i$$

である. つまりプレイヤー β は必勝戦略を持たない.

[(1) $\implies$ (2) の証明終わり]

[(2) $\implies$ (3)]

対偶を示そう. つまり β が $\text{BM}^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ で必勝戦略を持つならば $\text{BM}(X, \mathcal{A}, \beta)$ でも必勝戦略を持つことを示す.

β が $BM^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ で必勝戦略になる $f \in \text{Mon}(\mathcal{A})$ を持つとする. このとき f から $J(f) \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ が自然に誘導される. 任意の $g \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ について, $h \in \text{Mon}(\mathcal{A})$ を次のように定義する. $G \in \mathcal{A}$ が $G = [J(f), g]_{2i}$ の形をしている時には

$$h(G) = [J(f), g]_{2i+1}$$

その他の場合には $h(G) = G$ と定義する. すると, 任意の $i \in \omega$ について $[J(f), g]_i = [f, h]_i$ である. 条件 (3) の否定から,

$$\bigcap_{i \in \omega} [f, h]_i \neq \emptyset$$

であるが, これは

$$\bigcap_{i \in \omega} [J(f), g]_i \neq \emptyset$$

と同値なので, $J(f)$ は $BM(X, \mathcal{A}, \beta)$ における β の必勝戦略になる.

[(2) $\implies$ (3) の証明終わり]

[(3) $\implies$ (1)]

対偶を示そう. X が Baire でないとする. このとき, X が Baire でないことから存在が保証される第一類集合である開集合 $U \in \mathcal{A}$ をとる. 今から β の戦略 $f \in \mathfrak{S}_\omega(\mathcal{A})$ を定義する. $f(\emptyset) = U$ と定義する. U は疎集合 Z_i を使って $U = \bigcup_{i \in \omega} Z_i$ と表されているとする. 任意の $\sigma \in \downarrow^n(\mathcal{A})$ について $G = \sigma(n-1)$ とおいて $f(\sigma) \in \mathcal{A}$ を $f(\sigma) \subset G \setminus \text{Cl}(\bigcup_{i \leq n} Z_i)$ となるようにとる. ここで各 Z_i は疎であるため $G \setminus \text{Cl}(\bigcup_{i \leq n} Z_i) \neq \emptyset$ に注意しよう. すると, f はプレイヤー β の必勝戦略になる.

[(3) $\implies$ (1) の証明終わり]

以上で証明が終わる. □

定理 17. 位相空間 X について以下は同値である.

- (1) X は *Baire* 空間である.
- (2) X のある π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.
- (3) X のある π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.

証明. 定理 16 において $\mathcal{A}$ として X の空でない開集合全体を取ればわかる. □

定理 18. 位相空間 X について以下は同値である.

- (1) X は *Baire* 空間である.
- (2) X のある π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.
- (3) X のある π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.
- (4) X の任意の π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.
- (5) X の任意の π -基底 $\mathcal{A}$ について β は $BM^*(X, \mathcal{A}, \beta)$ において絶対勝利戦略を持たない.

証明. 上の定理 16 と 17 から従う. □

4 例

例 19 ([9][10]). $[0, 1]$ 上の実連続関数の全体に *sup* ノルムを入れた空間 $C[0, 1]$ は *Baire* 空間になり, また $C[0, 1]$ 内の至る所微分不可能な連続関数全体は $C[0, 1]$ 内の *comeager* 集合になっている. このことから至るところ微分不可能な連続関数の存在が従う.

例 20. 実数の中のリウビル数全体の集合は稠密 G_δ 集合であることが知られている ([6]). このことから超越数全体が実数の中で *comeager* になっていることがわかる.

また, 正規数全体の集合は第一類集合になっていることが知られている ([8]). ルベーグ測度に関してほとんど全ての実数は正規数であることが知られているので, この集合は零集合と第一類集合は似ているが, 同じではないということの例になっている.

参考文献

- [1] Dan Ma topology blog, “A Characterization of Baire spaces”

<https://dantopology.wordpress.com/2012/08/16/a-characterization-of-baire-spaces/>

- [2] Dan Ma topology blog, “The Banach–Mazur Game”

<https://dantopology.wordpress.com/2012/06/08/the-banach-mazur-game/>

- [3] R. C. Haworth and R. A. McCoy, *Baire spaces*, Warsaw, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977.
- [4] Anastasios Styliano, *A typical number is extremely non-normal*, Unif. Distrib. Theory, 17 (1) (2022), 77-88, DOI: 10.2478/udt-2022-0001
- [5] R. A. McCoy, *A Baire space extension*, Proc Amer. Math. Soc. 33 (1) (1972), 199–202.
- [6] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, 1980, GTM 2, Springer. [?] J. C. Oxtoby, *The Banach–Mazur game and Banach category theorem*, Contributions to the theory of games, vol 3. Ann. Math. Stud. 39 (1957), 143–163.
- [7] S. H. Jones, *Application of the Baire category theorem*, Real Analysis Change, 23 (1997/8), 363–394.
- [8] T. Salat, *A remark on normal numbers*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 11 (1966), 53–56.
- [9] S. Banach *Über die Baire’sche kategoriw gewisser funktionenmengen*, Stud. Math, 3 (1931), 128–132.
- [10] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non derivables*, Stud. Math. 3 (1931), 92–94.
- [11] A. M. Bruckner and K. M. Garg, *The level structure of a residual set of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 232 (1977), 307–321.
- [12] T. C. O’Neil, *A local version of the projection theorem and other results in geometric measure theory*, 1994, Thesis (Ph.D.)-University of London, University College London (United Kingdom).
- [13] C. Chen and E. Rossi, *Locally rich compact sets*, Illinois J. Math. 58 (2014), no. 3, 779-806.
- [14] H. Kato, *Higher-dimensional Bruckner-Garg type theorem*, Topology Appl. 154 (2007), no. 8, 1690-1702.