

Lebesgue–Stieltjes Measure

ナンブキトラ

2023 年 6 月 16 日

この文章では Lebesgue–Stieltjes 測度を構成してゆく．つまり以下の定理を証明する．

定理 1. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする．このとき， $\mathbb{R}$ 上の測度 μ_ϕ で，任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ で $a < b$ を満たすものに対して

$$\mu_\phi((a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

となるものが存在する．

1 Riesz–Markov–Kakutani による方法

以下の内容については [2] や [3] を読んでも良い．

定義 2. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．このとき X 上の測度 μ が *RMK 測度* であるとは以下の条件を満たすときにいう

- (1) μ は $[0, \infty]$ に値をとるボレル測度である．
- (2) X の任意のコンパクト集合 K について $\mu(K) < \infty$
- (3) X の任意のボレル集合は外部正則である．つまり $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid V \in \mathfrak{O}_X, E \subset V\}$ が成り立つ．ここで $\mathfrak{O}_X$ は X の開集合系である．
- (4) E が開集合もしくは $\mu(E) < \infty$ ならば E はコンパクト正則である．つまり， $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \in Cpt(X), K \subset E\}$ が成り立つ．ここで $Cpt(X)$ は X のコンパクト集合全体である．

X 上の *RMK 測度* 全体を $M(X)$ と書くことにする X 上の符号付き測度で二つの *RMK 測度* の差で表されるものの全体を $S(X)$ と書くことにする．

定義 3. X を位相空間とする. このとき $C(X)$ で X 上の実連続関数全体の集合を表す. $C_b(X)$ で X 上の有界実連続関数全体の集合を表す. また, X が距離空間で距離関数 d を備えているとき, $C_u(X)$ で X 上の (d に関して) 一様連続な実関数全体を表す. d を明示的に書いていないが, 以下では紛れがないので心配は無用である. また, 以下では $C_b(X)$ には $\sup$ ノルムが備わっているとする.

以下の定理は Riesz–Markov–Kakutani の表現定理の一つの形態である.

定理 4. X をコンパクトハウスドルフ空間とする. このとき

$$C_b(X)^* = C(X)^* = S(X).$$

である. より詳しく述べると, $\mu \in C_b(X)^*$ に対して二つの RMK 測度 α と β が (差を除いて) 一意的に対応して, 任意の $f \in C_b(X)$ に対して

$$\mu(f) = \int_X f \, d\alpha - \int_X f \, d\beta$$

が成り立つ. 特に非負な $\mu \in C_b(X)^*$ つまり $f \geq 0$ ならば $\mu(f) \geq 0$ を満たすような μ は通常の意味での測度 (非負の値しか取らない測度) に対応する.

定義 5. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $L_{\phi,n} : C_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$L_{\phi,n}(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{i}{2^n}\right) \left(\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right)$$

と定義する. f の台がコンパクトなので, これは有限和である.

補題 6. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. 任意の $f \in C_c(\mathbb{R})$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\phi,n}(f)$ が存在する.

証明. $M > 0$ を $\text{supp}(f) \subset [-M, M]$ を満たすものとし, $C = \phi(2M) - \phi(-2M)$ とする. 任意に $\varepsilon > 0$ を与える. このとき f は一様連続なので, ある δ が存在して, $|x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/C$ を満たす. $N \in \mathbb{N}$ を $2^{-N} < \delta$ とすると, $N < m < n$ をみたす $n, m \in \mathbb{N}$ について, $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$ を $0 \leq k < 2^{n-m}$ ならば $a_{i+k} = a_i$ とし, $a_{k(2^{n-m})} = k$ と定義すると,

$$L_{\phi,m}(f) \sum_{i=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{a_i}{2^n}\right) \left(\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right)$$

となるから,

$$\begin{aligned} |L_{\phi,n}(f) - L_{\phi,m}(f)| &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{i}{2^n}\right) - f\left(\frac{a_i}{2^{-n}}\right) \right| \left(\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{C} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\phi\left(\frac{i}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

を得る. つまり, $\{L_{\phi,n}(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\phi,n}(f)$ が存在する. $\square$

定義 7. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. このとき, $L\phi: C_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$L\phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{\phi,n}(f)$$

と定義する.

補題 8. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. このとき $L\phi$ は正値線形形式である.

証明. 各 $L_{\phi,n}$ が正値線形形式だからその極限で定義される $L\phi$ もそうである. $\square$

定義 9. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. 上の補題 8 と RMK から, $L\phi$ に対応する RMK 測度が存在する. これを μ_ϕ と書くことにする. もちろん

$$L\phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_\phi$$

が成り立つ.

命題 10. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. このとき任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ で $a < b$ を満たすものに対して

$$\mu_\phi((a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

が成り立つ.

証明. まず最初に, a, b が $s, t \in \mathbb{Z}$ で $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を使って $a = s/2^N$, $b = t/2^N$ と表される場合に等式を証明する. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $N < n$ として, $c_n = (s2^{n-N} + 1)/2^N$, $d_n = (t2^{n-N} + 1)/2^N$ とおく. このとき $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ を以下のように定義する.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_n - a}(x - a) & \text{if } x \in [a, c_n] \\ 1 & \text{if } x \in [c_n, b] \\ \frac{-1}{d_n - b}(x - d_n) & \text{if } x \in [b, d_n] \\ 0 & \text{o. w.} \end{cases}$$

すると, $n \rightarrow \infty$ のとき $f_n \rightarrow \chi_{(a,b]}$ なので,

$$\mu_\phi((a,b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu_\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} L_\phi(f_n)$$

である. $m > n$ として, $L_{\phi,m}(f_n)$ を計算する.

$$|L_{\phi,m}(f_n) - (\phi(b) - \phi(a))| \leq (\phi(d_n) - \phi(b)) + (\phi(c_n) - \phi(a))$$

となるので特に

$$|L_\phi(f_n) - (\phi(b) - \phi(a))| \leq (\phi(d_n) - \phi(b)) + (\phi(c_n) - \phi(a))$$

である. ϕ は右連続なので, $n \rightarrow \infty$ のとき右辺は 0 に近づくから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_\phi(f_n) = \phi(b) - \phi(a)$$

よって

$$\mu_\phi((a,b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

がわかる. a, b が一般の場合には, 測度論を使えばわかる. つまり, a_n と b_n を $s/2^N$ ($s \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の形で表される数で $a < a_n$ と $b < b_n$ を満たし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ を満たすものとする. すると $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (a_n, b_m] = (a, b]$ なので, 有限測度に関する極限公式と ϕ の右連続性を使えば $\mu_\phi((a,b]) = \phi(b) - \phi(a)$ がわかる. $\square$

2 分位関数を使う方法

この節では, Lebesgue–Stieltjes 測度の存在を Quantile function (分位関数) を使って証明する. ただし, 通常の Lebesgue 測度の存在は前提とする点には注意しよう.

定義 11. ϕ を $\mathbb{R}$ 上の右連続な単調増加関数とする. このとき, $I_\phi = [\inf \phi, \sup \phi] \cap \mathbb{R}$ と定義する (ここでわざわざ $\mathbb{R}$ との共通部分をとっているのは, $\sup$ や $\inf$ が ∞ や $-\infty$ の値を取る場合を見越してのことであり, そうでない場合には余計なものである). ϕ の分位関数 $Q_\phi : I_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$Q_\phi(w) = \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid w \leq \phi(x) \}$$

分位関数のことを一般化した逆関数と呼んだりもする.

補題 12. 任意の $w \in I_\phi$ と $x \in \mathbb{R}$ について $w \leq \phi(x)$ と $Q_\phi(w) \leq x$ は同値である.

証明. まず $w \leq \phi(x)$ を仮定する. このとき Q_ϕ の定義から $Q_\phi(w) \leq x$ である.

逆に $Q_\phi(w) \leq x$ を仮定する. このとき ϕ の右連続性から $\{z \in \mathbb{R} \mid w \leq \phi(z)\}$ は閉集合であるからこの集合の $\inf$ である $Q_\phi(w)$ もこの集合に属する. よって $w \leq \phi(Q_\phi(w))$ である. 今, $Q_\phi(w) \leq x$ と仮定しているので, ϕ の単調性から $w \leq \phi(x)$ である. $\square$

系 13. $x \in \mathbb{R}$ を固定すると

$$\{w \in I_\phi \mid Q_\phi(w) \leq x\} = \{w \in I_\phi \mid w \leq \phi(x)\}$$

が成り立つ.

補題 14. ϕ を $\mathbb{R}$ 上の右連続な単調増加関数とする. このとき任意の $y \in I_\phi$ について $y \leq \phi(Q_\phi(y))$ が成り立つ. また, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $Q_\phi(\phi(x)) \leq x$ が成り立つ.

証明. まず当然 $Q_\phi(y) \leq Q_\phi(y)$ なので先の補題から $y \leq \phi(Q_\phi(y))$ が成り立つ. また, 当然 $\phi(x) \leq \phi(x)$ なので, 当然 $Q_\phi(\phi(x)) \leq x$ が成り立つ. $\square$

補題 15. ϕ を $\mathbb{R}$ 上の右連続な単調増加関数とする. このとき Q_ϕ は右連続な単調増加関数である.

証明. 記述を簡単にするために $Q = Q_\phi$ と書くことにする. Q の単調性は定義から従う.

w を任意に固定する. $\sup_{y < w} Q(y) = x$ とおく. すると $x \leq Q(w)$ である. $y < w$ となる y を任意にとる. 今 $x < Q(w)$ と仮定して $\epsilon = (Q(w) - x)/2$ とする. ここで, もしも $w \leq \phi(x - \epsilon)$ とすると $Q(w) \leq x - \epsilon < x$ となるがこれは仮定に反するので $\phi(x - \epsilon) < w$ である. さらに, $Q(y) \leq Q(w)$ より, $Q(y) + \epsilon \leq x - \epsilon$ が成り立つ. よって $y \leq \phi(Q(y)) \leq \phi(Q(y) + \epsilon) \leq \phi(x - \epsilon) < w$ である. ゆえに $w \leq \phi(x - \epsilon) < w$ となって矛盾する. つまり $Q(w) = x$ であり, Q の左連続性が示された. $\square$

まず最初に ϕ が有界な場合に Lebesgue–Stieltjes 測度を構成する.

定理 16. $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする. さらに ϕ は有界であると仮定する. このとき, $\mathbb{R}$ 上の測度 μ_ϕ で, 任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ で $a < b$ を満たすものに対して

$$\mu_\phi((a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

となるものが存在する.

証明. I_ϕ 上の通常のルベグ測度を ν と書くことにする．そして $\mu = (Q_\phi)_*\nu$ と書くことにしよう．ここで Q_ϕ は左連続だから特にボレル可測であることに注意しよう．この μ が求めている測度であることを以下で証明しよう．まず任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\mu((-\infty, x]) = \nu(Q_\phi^{-1}((-\infty, x]))$ であるが，

$$Q_\phi^{-1}((-\infty, x]) = \{w \in I_\phi \mid Q_\phi(w) \leq x\} = \{w \in I_\phi \mid w \leq \phi(x)\}$$

であるから， $\mu((-\infty, x]) = \phi(x) - \inf \phi$ である． ϕ が有界なので，この値は有限の値であることに注意しよう．よって

$$\mu((a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

となる． □

次に ϕ が一般の場合に Lebesgue–Stieltjes 測度を構成しよう．

定理 17. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を右連続な非減少関数とする．このとき， $\mathbb{R}$ 上の測度 μ_ϕ で，任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ で $a < b$ を満たすものに対して

$$\mu_\phi((a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

となるものが存在する．

証明. 各 n について $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\phi_n(s) = \min\{\max\{\phi(s), -n\}, n\}$ と定義する．これは

$$\phi_n(s) = \begin{cases} n & n \leq \phi(s) \text{ のとき} \\ \phi(s) & -n \leq \phi(s) < n \text{ のとき} \\ -n & \phi(s) < -n \text{ のとき} \end{cases}$$

と書いても同じことである．この関数 ϕ_n は有界で右連続な単調関数になっている．よって先の定理から各 n について

$$\mu_n((a, b]) = \phi_n(b) - \phi_n(a)$$

となる測度 μ_n が存在する． ϕ_n は右連続なので二つの集合 $\{s \in \mathbb{R} \mid n \leq \phi(s)\}$ と $\{s \in \mathbb{R} \mid -n \leq \phi(s)\}$ には最小元が存在する． ϕ は単調増加なので $m_n \leq M_n$ である．それをそれぞれ M_n, m_n と書くことにする．まず任意の n と $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ について $\mu_n(A) = \mu_n(A \cap [m_n, M_n])$ が成り立つことを示そう．この式が成り立つ A 全体を $\mathfrak{G}$ とおく．すると $\mathfrak{G}$ は $(a, b]$ の形の集合を全て含んでいる． $\mathfrak{G}$ が λ 系であることを示そう． $X \in \mathfrak{G}(\lambda 1)$ と $\mathfrak{G}$ が単調な族について閉じている ($\lambda 2$) ことは簡単にわかる． $\mu_n(B \setminus A) =$

$\mu_n(B) - \mu_n(A) = \mu_n(B \cap [m_n, M_n]) - \mu_n(A \cap [m_n, M_n]) = \mu_n((B \setminus A) \cap [m_n, M_n])$ なので (λ3) も成り立つ. よって π - λ 定理によって, $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となることがわかる.

同様にして, 任意の n と $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ について

$$\mu_n(A \cap I_n) = \mu_{n+1}(A \cap I_n)$$

となることがわかる.

次に任意の n と $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ について $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ となることを示す. まず $I_n = [m_n, M_n]$ と置くと, 定義から $I_n \subset I_{n+1}$ となることがわかる. よって $\mu_n(A) = \mu_n(A \cap I_n) = \mu_{n+1}(A \cap I_n) \leq \mu_{n+1}(A \cap I_n) + \mu_{n+1}(A \cap (I_{n+1} \setminus I_n)) = \mu_{n+1}(A \cap I_{n+1})$ なので成り立つ.

関数 $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ と定義する. μ_n の単調性からこの極限は存在する. この μ があの式を満たすことは ϕ_n が ϕ に各点収束することからわかる. μ が測度であることを示そう. 完全加法性を示せば良い. $\sum$ に関する単調収束定理, つまり数え上げ測度に関する単調収束定理から

$$\begin{aligned} \mu \left(\coprod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \left(\coprod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_n(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \end{aligned}$$

よって μ は完全加法的である. 以上で一般の ϕ に対しても Lebesgue–Stieltjes 測度が存在することがわかった. $\square$

3 おまけ： $\mathbb{R}$ についての Prokhorov の定理

$\mathbb{R}$ に対する Prokhorov の定理は Helly の選出定理を使えば比較的簡単に示せるので, おまけとして紹介する.

以下の定理の証明は [1]などを参考にしても良い.

定理 18 (Helly の選出定理). $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $[0, 1]$ に値をとる右連続な非減少関数の列とする. このとき部分列 $\{F_{\phi(n)}\}$ とある右連続な非減少関数 F が存在して F の連続点 $x \in \mathbb{R}$ 毎に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\phi(n)}(x) = F(x)$$

を満たす.

定理 19 ($\mathbb{R}$ についての Prokhorov の定理). $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ とする. このとき以下は同値である.

- (1) $\mathcal{S}$ は相対コンパクトである.
- (2) $\mathcal{S}$ は緊密である.

証明. 相対コンパクト性から緊密性を示す.

$$\forall \epsilon \in (0, 1) \exists m \in \mathbb{N} \forall \mu \in \mathcal{S} \mu((-m, m)) \geq 1 - \epsilon$$

を示そう. 背理法による.

$$\exists \epsilon \in (0, 1) \forall m \in \mathbb{N} \exists \mu \in \mathcal{S} \mu((-m, m)) < 1 - \epsilon$$

を仮定する. 各 $m \in \mathbb{N}$ について対応する測度を μ_m とかく. このとき, $\mathcal{S}$ のコンパクト性から, 部分列 $\{m_i\}$ と $\{\mu_i\}$ が存在して $x \leq m_i$ ならば

$$\mu_i((-x, x)) < 1 - \epsilon$$

と

$$\mu_i \implies \mu$$

が成り立つ. そして弱収束していることと $m_i \rightarrow \infty$ から任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$\mu((-x, x)) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mu_i((-x, x)) \leq 1 - \epsilon$$

が成り立つが, $x \rightarrow \infty$ とすると, $1 \leq 1 - \epsilon$ となるので矛盾する.

今度は逆を示そう. $\mathcal{S}$ は緊密であるとする. このとき

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists M_N \in \mathbb{N} \forall \mu \in \mathcal{S} \mu([-M_N, M_N]) \geq 1 - 2^{-N} \wedge M_N \geq N$$

が成り立つ. $\mathcal{S}$ 内の部分列 $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとる. μ_n の分布関数を F_n と書くことにする. このとき, Helly の選出定理から F_n の部分列と単調非減少関数 F で, F の連続点について各点収束する. 緊密性から, $M_N \leq x$ を満たす x について

$$1 \geq F_n(x) - F_n(-x) \geq 1 - 2^{-N}$$

であり, F の不連続点は高々可算個しかないので, x を連続点として $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$1 \geq F(x) - F(-x) \geq 1 - 2^{-N}$$

が成り立つ. $x \rightarrow \infty$ とすると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - F(-x)) = 1$$

が成り立つ. また, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(-x) = 0$ は F_n の収束先であることからすぐわかるので, この文章の前半で頑張って示した内容から F はある確率測度 μ の分布関数になる. つまり, $\mu_n \Rightarrow \mu$ となるので, S が相対コンパクトであることがわかる. $\square$

参考文献

- [1] はてなブログ電波通信の記事「Helly 空間と Helly の選出定理」,
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2021/03/25/100947>
- [2] はてなブログ電波通信の記事「リース・マルコフ・角谷の表現定理の証明 (入射角 16.225° の測度論入門 2)」,
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2015/10/28/213025>
- [3] はてなブログ電波通信の記事「Riesz-Markov-Kakutani の表現定理 II」,
<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2020/02/02/213341>
- [4] 伊藤清三, 「ルベーグ積分入門」, 1963 年, 裳華房.
- [5] 船木直久, 「確率論」, 講座・数学の考え方 20, 2004, 朝倉書店.