

C^∞ 関数の鏡像拡張

ナンブ キトラ

2022 年 8 月 21 日

1 準備

定義 1. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とする. そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ とする. このとき f が $a \in U$ で全微分可能であるとは線型写像^{*1} $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ が存在し

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|}$$

が成り立つときにいう. このとき f は点 a において任意の方向に偏微分可能であり, さらに A は行列として

$$A = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right)_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, l}$$

と表される. この A のことを f の導関数であるとかヤコビ行列だとか呼ぶ. ここで $f = (f_1, \dots, f_l)$ と定義する. そしてこの A をこの文章では $A = (\mathbf{D}f)(a)$ と表す.

定義 2. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とする. そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ は C^1 級とする. このとき関数 $e_f: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$$e_f(x, y) = f(x) - f(y) - (\mathbf{D}f)(y)(x - y)$$

と定義する. この関数は連続関数であることに注意しよう. そして $U \times U$ 上の関数 $E: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$$E_f(x, y) = \begin{cases} \frac{e_f(x, y)}{|x - y|} & x \neq y; \\ 0 & x = y \end{cases}$$

^{*1} 本来は接空間の間の線型写像 $A: T_a U \rightarrow T_{f(a)} \mathbb{R}^l$ と書くべきかもしれないが, 解析学だとユークリッド空間とその接空間を同一視する. また線型写像ではなく, 行列と言ってもよい. なぜなら有限次元空間の間の線型写像は行列と同一視されるからである.

と定義する.

この定義のもと次が成り立つ.

lem:1step

補題 3. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とする. そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ を C^1 級とする. このとき任意の $a \in U$ について

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{e(x, a)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} E(x, a) = 0.$$

が成り立つ.

証明. 全微分可能性の定義から明らか. □

初等的な事実として以下が成り立つ.

定理 4. $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とする. そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ とする. このとき f を C^1 級ならば f は U 内の任意の点で全微分可能である. またこのとき $\mathbf{D}f: U \rightarrow \mathbb{R}^{k \times l}; x \rightarrow (\mathbf{D}f)(x)$ は連続写像である.

以下は多変数関数に関する平均値の定理である.

heikinnti

補題 5. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $U \subset \mathbb{R}^k$ を開集合とする. そして $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級とする. 2点 $x, y \in U$ に関して x と y を結ぶ直線が U に含まれていると仮定する. すなわち任意の $t \in [0, 1]$ について $tx + (1 - t)y \in U$ ということである. このとき, x と y を結ぶ直線上の点 z が存在して

$$f(x) - f(y) = \sum_{q=0}^k \partial_q f(z)(x_q - y_q)$$

が成り立つ.

証明. 関数 $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(t) = f(tx + (1 - t)y)$ と定義する. このとき F は $[0, 1]$ 上連続で $(0, 1)$ 上では微分可能である. よって一変数の平均値の定理により $F(1) - F(0) = F'(s)$ となる $s \in (0, 1)$ が存在する. $z = sx + (1 - s)y$ とおく. ここで合成関数の微分の公式から $F'(s) = \sum_{q=1}^k \partial_q f(z)(x_q - y_q)$ となるので, 結局

$$f(x) - f(y) = \sum_{q=1}^k \partial_q f(z)(x_q - y_q)$$

となる. □

補題 6. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\mathbb{R}^m$ 上の連続関数からなる族 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は関数 $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ に広義一様収束しているとする. このとき $\mathbb{R}^m$ の任意のコンパクト集合 K と正の数 $\epsilon \in (0, \infty)$ に対して $\delta = \delta(K, \epsilon) \in (0, \infty)$ が存在して以下を満たす. もし $x, y \in K$ が $\|x - y\| \leq \delta$ を満たすならば任意の n について $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon$ と $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$ が成り立つ.

証明. まず, 各 f_n は連続であり, g に広義一様収束しているので g は連続である. ゆえに g は K 上で一様連続である. よってある $\delta_1 \in (0, \infty)$ が存在して $x, y \in K$ が $\|x - y\| \leq \delta_1$ を満たすならば $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon/3$ が成り立つ. さて $\{f_n\}$ は g に広義一様収束しているので特に K 上では g に一様収束している. つまり十分大きい $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $n > N$ を満たす n について任意の $x \in K$ について $|g(x) - f_n(x)| \leq \epsilon/3$ が成り立つ. さて, $\{0, \dots, N\}$ は有限集合であり, $f_0, \dots, f_N$ は K 上で一様連続になるので, 十分小さい $\delta_2 \in (0, \infty)$ をとれば, もし $x, y \in K$ が $\|x - y\| \leq \delta_2$ を満たすならば任意の $i \in \{0, \dots, N\}$ について $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \epsilon$ が成り立つ. ここで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とする. そして $x, y \in K$ が $\|x - y\| \leq \delta$ を満たすとする. このとき $\delta \leq \delta_2$ なので $i \in \{0, \dots, N\}$ について $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \epsilon$ となる. $n > N$ となる n については $\delta \leq \delta_1$ なので

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f_n(y)| \leq 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

が成り立つ. これで補題が示された. $\square$

注意. おそらく, コンパクト開位相におけるコンパクトな族は定義域内のコンパクト集合を与えるとその上で同程度一様連続になるという定理があるのだと思われる.

命題 7. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $f_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする. 以下を仮定する.

1. 各点 $x \in \mathbb{R}^m$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在する. 以下では $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ とおく.
2. 各 f_n は各 $q \in \{1, \dots, m\}$ について x_q 方向に偏微分可能であり, さらに $\partial_q f_n$ は $\mathbb{R}^m$ 上で連続である.
3. 各点 x について $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial f_n(x)$ は収束し, さらに $\mathbb{R}^m$ 上で広義一様収束する.

このとき f 全微分可能である. 特に各 x_q 方向に偏微分可能であり, さらに任意の q と $x \in \mathbb{R}^m$ について $\partial_q f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_q f_n(x)$ が成り立つ.

証明. まず f_n が f に広義一様収束していることをみよう. $\mathbb{R}^m$ の閉球体上で一様収束す

ること証明すれば十分である． $\delta \in (0, \infty)$ を任意に取る． $B(0, \delta)$ 上で一様収束すること
をこれから示す．仮定の 1, 2 から，十分大きい $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取ると任意の $i, j > N$ につ
いてと任意の $q \in \{1, \dots, m\}$ について

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\partial_q f_j(x) - \partial_q f_i(x)| \leq \frac{\epsilon}{2m\delta}$$

と

$$|f_i(0) - f_j(0)| \leq \epsilon/2$$

が成り立つ．(収束するので特にコーシー列になる)．

$k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $k, l > N$ となるようにとる．このとき補題 5 より $x \in B(a, \delta)$ を任意に取
ると a と x を結ぶ直線上の点 z と w が存在して

$$(1) \quad f_k(x) - f_k(a) = \sum_{q=1}^m \partial_q f_k(z) x_q$$

$$(2) \quad f_l(x) - f_l(a) = \sum_{q=1}^m \partial_q f_l(w) x_q$$

が成り立つ．このとき $|x_i| \leq \|x\| \leq \delta$ なので

$$|(f_k(x) - f_k(a)) - (f_l(x) - f_l(a))| \leq \|x\| \cdot \sum_{q=1}^m |\partial_q f_k(z) - \partial_q f_l(w)| \leq \epsilon/2$$

が成り立つ．よって $|f_k(0) - f_l(0)| \leq \epsilon/2$ なので

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \epsilon.$$

が成り立つ． $l \rightarrow \infty$ とすると

$$|f(x) - f_l(x)| \leq \epsilon$$

なので f_n が f に $B(a, \delta)$ 上一様収束していることがわかる．よって $\mathbb{R}^m$ 上で f_n は f に
広義一様収束する．

さて任意の $q \in \{1, \dots, m\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_q f_n(x)$ を $G_q(x)$ と書くことにする．各
 $\partial_q f_n$ が連続なので G_q も連続である．

さて

$$R(x, y) = f(x) - f(y) - \sum_{q=1}^m G_q(y)(x_q - y_q)$$

とする．今から任意に固定した $a \in \mathbb{R}^m$ について

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{R(x, a)}{\|x - a\|} = 0$$

となることを証明しよう．

まず $K = B(a, 1)$ とおく． $x \in K \setminus \{a\}$ を任意に取る． 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について補題 [lem:heikinnti](#) より x と a の間の点 z_n が存在して

$$f_n(x) - f_n(a) = \sum_{q=1}^m \partial_q f_n(z_n)(x_q - a_q)$$

が成り立つ．ここで必要ならば部分列をとり， z_n は z に収束するとしてもよい．この z は a と x を結ぶ直線の上の点である．

補題 [lem:hodai](#) より， $\epsilon \in (0, \infty)$ を与えたとき， $\delta = \delta(\epsilon) \in (0, \infty)$ が存在して $x, y \in B(a, 1)$ が $|x - y| \leq \delta$ を満たすならば任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $q \in \{1, \dots, m\}$ について $|\partial_q f_n(x) - \partial_q f_n(y)| \leq \epsilon$ である．特に $|G_q(x) - G_q(y)| \leq \epsilon$ もわかる．

ここで $B(a, 1)$ 上で $\partial_q f_n(z)$ は G_q に一様収束しているの十分大きい n について $|G_a(z) - \partial_q f_n(z)| \leq \epsilon$ である．そして n を十分大きく取れば $\|z_n - z\| \leq \delta$ となるので， $|\partial_q f_n(z) - \partial_q f_n(z_n)| \leq \epsilon$ となる．よって

$$|G_q(z) - \partial_q f_n(z_n)| \leq |G_a(z) - \partial_q f_n(z)| + |\partial_q f_n(z) - \partial_q f_n(z_n)| \leq 2\epsilon$$

なので特に $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_q f_n(z_n) = G_q(z)$ である．よって

$$f(x) - f(a) = \sum_{q=1}^m G_q(z)(x_q - a_q)$$

である．従って， $x \in B(a, 1)$ が $\|x - a\| \leq \delta$ を満たすならば

$$\begin{aligned} |R(x, a)| &= \left| \sum_{q=1}^m G_q(z)(x_q - a_q) - \sum_{q=1}^m G_q(a)(x_q - a_q) \right| \leq \|x - a\| \sum_{q=1}^m |G_q(z) - G_q(a)| \\ &\leq m\epsilon \|x - a\| \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x, y)}{\|x - a\|} = 0$$

である．これは f が全微分可能であり，さらに $\partial_q f = G_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_q f_n$ ということを意味する． □

命題 8. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $f_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を関数とする. 以下を仮定する.

1. 各点 $x \in \mathbb{R}^m$ について $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が存在する. 以下では $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ とおく.
2. 各 f_n は各 $q \in \{1, \dots, m\}$ について x_q 方向に偏微分可能であり, さらに $\partial_q f_n$ は $\mathbb{R}^m$ 上で連続である.
3. 各点 x について $\sum_{n=0}^{\infty} \partial_q f_n(x)$ は収束し, さらに $\mathbb{R}^m$ 上で広義一様収束する.

このとき f 全微分可能である. 特に各 x_q 方向に偏微分可能であり, さらに任意の q と $x \in \mathbb{R}^m$ について $\partial_q f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_q f_n(x)$ が成り立つ.

証明. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $F_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を $F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ と定義すると, $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は命題 7 の仮定を満たすので, 定理が成り立つ. $\square$

2 本文

定理 9 (ファンデルモンドの行列式). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. このとき任意の $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

が成り立つ.

補題 10 (クラメルの公式). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. A を n 次の可逆な正方行列として

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とする. b を n 次元の縦ベクトルとして

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とする. このとき線形方程式 $Ax = b$ の解は x の第 i 成分を x_i として

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

で表される. ここで A_i は A の第 i 列目の成分を b に置き換えた行列である.

lem:seq

補題 11. 以下の条件を満たす二つの実数列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が存在して以下を満たす.

1. 任意の i について $b_i < 0$ を満たす.
2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| |b_i|^n < \infty$ を満たす.
3. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (b_i)^n = 1$ を満たす.
4. $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = -\infty$ が成り立つ.

証明. 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $b_k = -2^k$ と定義する. そして $a_{k,N}$ を $\sum_{k=0}^N X_k (b_k)^n = 1$ の解とする. つまり $N+1$ 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_N \\ b_0^2 & b_1^2 & \dots & b_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^N & b_1^N & \dots & b_N^N \end{pmatrix}$$

と全ての成分が 1 である $N+1$ 次元の縦ベクトル

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

についての線形方程式 $Ax = u$ の第 k 成分を $a_{k,N}$ とする. するとクラメル公式から $a_{k,N}$ は

$$a_{k,N} = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

と表される．ここで A_k は A の第 k 列を u に変えた行列である．今からこの量を具体的に
 に表示しよう．まず A_k を

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_N \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^N & c_1^N & \dots & c_N^N \end{pmatrix}$$

と表示する．このとき $i \neq k$ ならば $c_i = b_i$ であり， $i = k$ の時は $c_k = 1$ である．

さて，まず $\det(A)$ はファンデルモンドの行列式の公式が使えて

$$\det(A) = \prod_{i < j} (b_j - b_i) = \prod_{i < j} (2^i - 2^j)$$

となる．また $\det(A_k)$ もファンデルモンドの行列式が適応できる行列の形になっている．
 よって第 k 列の成分が u になっていることに気をつけると

$$\det(A_k) = \prod_{i < j} (c_j - c_i) = \prod_{i < j, i \neq k, j \neq k} (b_j - b_i) \prod_{j < k} (1 - b_j) \prod_{k < j} (b_j - 1)$$

すると

$$\begin{aligned} a_{k,N} &= \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \\ &= \frac{\prod_{i < j, i \neq k, j \neq k} (b_j - b_i) \prod_{j < k} (1 - b_j) \prod_{k < j} (b_j - 1)}{\prod_{i < j, i \neq k, j \neq k} (b_j - b_i) \prod_{j < k} (b_k - b_j) \prod_{k < j} (b_j - b_k)} \\ &= \frac{\prod_{j < k} (1 + 2^j) \prod_{k < j} (-2^j - 1)}{\prod_{j < k} (-2^k + 2^j) \prod_{k < j} (-2^j + 2^k)} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(1 + 2^j)}{2^j - 2^k} \prod_{i=k+1}^N \frac{1 + 2^j}{2^j - 2^k} \end{aligned}$$

となる．今ここで β_k を

$$\beta_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + 2^j}{2^j - 2^k}$$

とし， $\gamma_{k,N}$ を

$$\gamma_{k,N} = \prod_{j=k+1}^N \frac{1 + 2^j}{2^j - 2^k}$$

とすると

$$a_{k,N} = \beta_k \cdot \gamma_{k,N}$$

である。さて、 a_k を $a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} a_{k,N}$ と定義したいのだが、この極限が存在すること
を確かめよう。今から β_k と $\gamma_{k,N}$ を上から評価する。まず $j \in \{0, \dots, k-1\}$ のとき、
 $2^j \leq 2^k$ なので

$$|2^j - 2^k| = 2^k - 2^j \geq 2^{k-1}$$

なので

$$\begin{aligned} |\beta_k| &\leq \prod_{j=0}^{k-1} (1 + 2^j) 2^{-(k-1)} \leq \prod_{j=0}^{k-1} 2^{j+1-(k-1)} = \prod_{j=0}^{k-1} 2^{j+2-k} = 2^{\sum_{j=0}^{k-1} (j+2-k)} \\ &= 2^{\frac{k(k-1)}{2} + (2-k)k} = 2^{\frac{-k^2+3k}{2}} \end{aligned}$$

次に $\gamma_{k,N}$ を評価する。 $\gamma_{k,N}$ の各因子について

$$\frac{1 + 2^j}{2^j - 2^k} = \frac{1 + 2^k + 2^j - 2^k}{2^j - 2^k} = 1 + \frac{1 + 2^k}{2^j - 2^k}$$

となる $j \geq k+1$ のとき $2^j - 2^k \geq 0$ に注意しよう。 $x \geq 0$ のとき $\log(1+x) \leq x$ に注意
すると

$$\begin{aligned} \log(\gamma_{k,N}) &= \sum_{j=k+1}^N \log\left(1 + \frac{1 + 2^k}{2^j - 2^k}\right) \leq \sum_{j=k+1}^N \frac{1 + 2^k}{2^j - 2^k} \leq (1 + 2^k) \sum_{j=k+1}^N 2^{-(j-1)} \\ &\leq (1 + 2^k) \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-(j-1)} = (1 + 2^k) 2^{-k+1} \leq 4 \end{aligned}$$

となる。つまり k を固定したとき $\gamma_{k,N}$ は有界でその絶対値は上から e^4 で抑えられる。そ
して N が増加するごとに 1 より大きい因子がかけられていくので $\gamma_{k,N}$ は N が増加する
とき単調増加する。つまり $\gamma_{k,N}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき収束する。 β_k は N に依存しないので
 $\lim_{N \rightarrow \infty} a_{k,N}$ は存在する。さらに上での評価から

$$(3) \quad |a_k| \leq e^4 2^{\frac{-k^2+3k}{2}}$$

という不等式を得る。ここで $b_k = -2^k$ なので各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |b_k|^n$$

は有限の値に収束する。 $N \leq k$ のときには $a_{k,N} = 0$ と暫定的に置いてやると $a_{k,N}$ の定
義から各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,N} b_k^n = 1$$

が成り立つ. $|a_{k,N}| \leq |a_k|$ なので優収束定理が使えて

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^n = 1$$

となる. よって数列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は条件を満たす. $\square$

定義 12. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 集合 S_+^n を

$$S_+^n = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

と定義し, D_+^n を $f \in C^\infty(S_+^n)$ であって, その任意階数の導関数は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上に連続関数として拡張できるもの全体とする.

定理 13. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 数列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ と $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を補題 [II](#) ^{lem:seq} で存在が保証される数列とする. そして $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 関数であって $t \leq 1$ のとき $\phi(t) = 1$ で $2 \leq t$ のとき $\phi(t) = 0$ となるものとする. このとき $f \in D_+^n$ に対して f は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上に連続関数として拡張できるのでその拡張を同じ記号 f で表すことにして

$$E(f)(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & t \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \phi(b_i t) f(x, b_i t) & 0 < t \end{cases}$$

と定義すると $E(f)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上で C^∞ 関数で $E(f)|_{S_+^n} = f$ である.

証明. 各 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ について $\lim_{t \rightarrow +0} \partial_\alpha f(x, t)$ を $G_\alpha(x)$ とする. また, $\partial_\alpha f(x, 0) = G_\alpha$ と考える. そして各 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ について $E_\alpha(f): \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$E_\alpha(f)(x, t) = \begin{cases} \partial_\alpha f(x, t) & t \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \partial_\alpha (\phi(b_i t) f(x, b_i t)) & 0 < t \end{cases}$$

と定義する. $E_0 = E$ に注意しよう.

$r \in (0, \infty)$ とし, $B(r) = \{(x, t) \mid \|x\| \leq r \text{ and } |t| \leq r\}$ とする. $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ を固定する. このとき

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \phi(b_i t) f(x, b_i t) &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha, \beta \leq \alpha, \gamma \leq \alpha} b_i^{|\beta|} (\partial_\beta \phi)(b_i t) \cdot b_i^{|\gamma|} (\partial_\gamma f)(x, b_i t) \\ &= b_i^{|\alpha|} \sum_{\beta+\gamma=\alpha, \beta \leq \alpha, \gamma \leq \alpha} (\partial_\beta \phi)(b_i t) (\partial_\gamma f)(x, b_i t) \end{aligned}$$

である．さて $(x, t) \in B(r)$ とすると $2 \leq b_i t$ ならば ϕ の定義から $\partial_\beta \phi(b_i t) = 0$ となる．よって $b_i \rightarrow -\infty$ なので $(x, t) \in B(r)$ ならば, i に依存しない定数 $M_{\alpha, r} \in (0, \infty)$ が存在して $|\partial_\alpha(\phi(b_i t)f(x, b_i t))| \leq M_{\alpha, r}$ となる．よって $(x, t) \in B(r)$ ならば $|\sum_i a_i \partial_\alpha(\phi(b_i t)f(x, b_i t))| \leq M_{\alpha, r} \sum_i a_i b_i^{|\alpha|} < \infty$ なので, $\sum_i a_i \partial_\alpha(\phi(b_i t)f(x, b_i t))$ は広義一様収束する．

上の議論から優収束定理が使えて, $\sum_{i=0}^\infty a_i b_i^m = 1$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -0} \sum_{i=0}^\infty a_i \partial_\alpha(\phi(b_i t)f(x, b_i t)) &= \sum_{i=0}^\infty \lim_{t \rightarrow -0} a_i \partial_\alpha(\phi(b_i t)f(x, b_i t)) \\ &= \sum_{i=0}^\infty a_i b_i^{|\alpha|} \lim_{t \rightarrow -0} \partial_\alpha f(x, b_i t) = \sum_{i=0}^\infty a_i b_i^{|\alpha|} G_\alpha(x) = G_\alpha(x) \end{aligned}$$

を得る．ここで $\mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty)$ 上の関数 U_α を

$$U_\alpha(x, t) = \begin{cases} \partial_\alpha f(x, t) & t > 0 \\ G_\alpha(x) & t = 0 \end{cases}$$

と定義する． D_+^n の定義から U_α は連続関数である．また $\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0]$ 上の関数 L_α を

$$L_\alpha(x, t) = \begin{cases} E_\alpha(f)(x, t) & t < 0 \\ G_\alpha(x) & t = 0 \end{cases}$$

と定義する．優収束定理より L_α は定義域の上で連続となる．すると定義域の共通点では同じ値を取るので, $t \geq 0$ では $U(x, t)$, $t \leq 0$ では $L(x, t)$ と定義するとこれは $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の関数として連続になる．そして命題 [B](#) ^{Prop: sumsum} を帰納的に適応すると $\partial_\alpha(E(f)) = E_\alpha(f)$ であることがわかり, これで定理の証明が終わる． $\square$

定義 14. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする． M をハウスドルフ空間であって, 各点において M は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ の開集合と同相な開近傍をもつとする．このとき以下の条件を「条件 (B1)」と呼ぶことにする：開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と同相写像 $\phi_i: U_i \rightarrow U_i^\sharp \subset \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty)$ が存在して任意の $i, i' \in I$ について $F_{i, i'} = \phi_{i'} \circ \phi_i^{-1}$ は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ の開集合 $\phi_i(U_i \cap U_{i'})$ で定義された関数であり, 尚且つ $F_{i, i'}$ は $U_{i, i'}^\circ = \phi_i(U_i \cap U_{i'}) \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$ 上では C^∞ であり, $F_{i, i'}|_{U_{i, i'}^\circ}$ とその任意階数の微分は $\phi_i(U_i \cap U_{i'})$ 上へ連続な拡張を持つ．

また以下の条件を「条件 (B2)」と呼ぶことにする：開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と同相写像 $\phi_i: U_i \rightarrow U_i^\sharp \subset \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty)$ が存在して任意の $i, i' \in I$ について $F_{i, i'} = \phi_{i'} \circ \phi_i^{-1}$ は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ の開集合 $\phi_i(U_i \cap U_{i'})$ で定義された関数であり, 尚且つ $\phi_i(U_i \cap U_{i'})$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の開集合 $V_{i, i'}$ とその上の C^∞ 級写像 $G_{i, i'}: V_{i, i'} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して $G_{i, i'}$ を $\phi_i(U_i \cap U_{i'})$ に制限すると $F_{i, i'}$ になり $G_{i, i'}$ は滑らかな埋め込みになる．

系 15. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. M をハウスドルフ空間であって, 各点において M は $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ の開集合と同相な開近傍をもつとする. このとき条件 (B1) と条件 (B2) は同値である.

参考文献

- E [1] E. Bierstone, *Differentiable functions*, Bull. Braz. Math. Soc., 11 (2) (1980), 139–189.
- Se [2] R. T. Seeley, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 625–626.