

ルベーグの微分定理と積分の変数変換定理

ナンプキトラ

2022 年 3 月 19 日

1 ルベーグの微分定理

以下では $\mathbb{R}^n$ にはノルム $\|\cdot\|$ が備わっているとするが、特に断りのかぎり、具体的に指定しない。

定義 1. $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ と定義する。

補題 2 (「5r 被覆補題」). $\mathcal{F} \subset X \times (0, \infty)$ とし、空集合ではないとする。そして

$$\sup \pi_2(\mathcal{F}) = \sup\{r \mid \exists x \in X \ (x, r) \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

が成り立つと仮定する。このとき、部分集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ が存在して以下を満たす。

(1) もしも $(x, r), (x', r') \in \mathcal{G}$ が $(x, r) \neq (x', r')$ を満たすならば、以下が成り立つ。

$$B(x, r) \cap B(x', r') = \emptyset.$$

(2) 以下が成り立つ。

$$\bigcup_{(x, r) \in \mathcal{F}} B(x, r) \subset \bigcup_{(x, r) \in \mathcal{G}} B(x, 5r).$$

証明. Zorn の補題を用いる。集合 $\mathfrak{S}$ を $\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ で以下の条件を満たすものとする。

(a) もしも $(x, r), (x', r') \in \mathcal{S}$ が $(x, r) \neq (x', r')$ を満たすならば、以下が成り立つ。

$$B(x, r) \cap B(x', r') = \emptyset.$$

(b) もしも $(x, r) \in \mathcal{F}$ が

$$B(x, r) \cap \left(\bigcup_{(y, l) \in \mathcal{S}} B(y, l) \right) \neq \emptyset.$$

を満たすならば $(x', r') \in \mathcal{S}$ が存在して $B(x, r) \cap B(x', r') \neq \emptyset$ と $r \leq 2r'$ が成り立つ.

このとき $\mathfrak{S}$ は Zornian set (いわゆる帰納的集合) になることを示そう. まず $\mathfrak{S}$ が空集合ではないことを示そう. $R = \sup\{r \mid \exists x \in X (x, r) \in \mathcal{F}\} < \infty$ とおく. するとある $(y, l) \in \mathcal{S}$ が存在して $R/2 < r$ が成り立つ. このとき $\{(y, l)\}$ が $\mathfrak{S}$ に属することを示そう. (b) の条件を確かめれば良いが, $R < 2r$ なのでこの条件を満たすことは明らかである.

また, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{S}$ が鎖である時に $\bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{S}$ は簡単に確かめられる. 以上から $\mathfrak{S}$ が Zornian set になることがわかり, Zorn の補題から極大元 $\mathcal{G}$ が存在する. $\mathcal{G}$ が補題の条件を満たすことを示そう. 補題の (1) の条件を満たすことは $\mathfrak{S}$ の条件からわかる. (2) の条件を示そう. まず背理法のためにある $(x, r) \in \mathcal{F}$ が存在して $B(x, r) \cap \left(\bigcup_{(y, l) \in \mathcal{S}} B(y, l) \right) = \emptyset$. を満たすとしよう. そして $\mathcal{A} = \{(x, r) \in \mathcal{F} \mid B(x, r) \cap \left(\bigcup_{(y, l) \in \mathcal{S}} B(y, l) \right) = \emptyset.\}$ とおき, $L = \sup\{r \mid \exists x \in X, (x, r) \in \mathcal{A}\}$ として $(a, w) \in \mathcal{A}$ を $L/2 < w$ を満たすものとする. このとき $\mathcal{G} \cup \{(a, w)\}$ は $\mathfrak{S}$ の (a) の条件を満たす. ついで (b) の条件も満たす. というのももしも $B(x, r) \cap \left(B(a, w) \cup \bigcup_{(y, l) \in \mathcal{S}} B(y, l) \right) \neq \emptyset$ を満たすならば, $B(x, r) \cap B(a, w) \neq \emptyset$ と $(x, r) \in \mathcal{A}$ が同時に成り立つ場合以外は (b) の結論が成り立つことは $\mathcal{S}$ が (b) を満たすことから従うが, この $B(x, r) \cap B(a, w) \neq \emptyset$ と $(x, r) \in \mathcal{A}$ が同時に成り立つ場合には $L \leq 2w$ からやはり $\mathcal{G} \cup \{(a, w)\}$ も (b) の条件を満たすことがわかる. これは $\mathcal{G}$ が極大であることに反するので, $\mathcal{A} = \emptyset$ である. つまり, 任意の $(x, r) \in \mathcal{F}$ について

$$B(x, r) \cap \left(\bigcup_{(y, l) \in \mathcal{S}} B(y, l) \right) \neq \emptyset.$$

となる. すると (b) の条件から $(x', r') \in \mathcal{G}$ が存在して $B(x, r) \cap B(x', r') \neq \emptyset$ と $r \leq 2r'$ を満たす. このとき $B(x, r) \subset B(x', 5r')$ を満たすので (2) の条件が満たされる. $\square$

定義 3. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\mathcal{L}^n$ は n 次元ルベグ測度を表すとする.

補題 4. $A \subset \mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の球体の族 $\mathcal{B}$ に被覆されており、

$$\sup\{\text{diam}(B) \mid B \in \mathcal{B}\} < \infty$$

とする。このとき $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ が存在して以下を満たす。 $\mathcal{A} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の元は互いに交わらず、

$$\mathcal{L}^d(A) \leq 5^d \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(B_i)$$

証明. 補題 2 からわかる。 □

定義 5. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、 $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。このとき $L^1_{loc}(U)$ を次の条件を満たす可測関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合とする：任意のコンパクト集合 $K \subset U$ について

$$\int_K |f| d\mathcal{L}^n < \infty$$

を満たす。

定義 6. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $x \in \mathbb{R}^d$ について

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(t)| dt$$

と定義する。可測関数の $\sup$ は可測関数なので Mf は可測関数である。

命題 7 (weak estimation). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば任意の $a > 0$ に対して

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > a\}) \leq \frac{A}{a} \|f\|_1$$

が成り立つ。ここで A は次元にのみ依存する関数である。

証明. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > a\}$ とする。 $x \in S$ に対して、 $r_x > 0$ が存在して

$$\int_{B(x,r_x)} |f(t)| dt > a \cdot \mathcal{L}^n(B(x,r_x))$$

を満たす。

$$\{B(x, r_x)\}_{x \in S}$$

に先の被覆定理を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(S) &\leq 5^n \sum_{i=1} m(B(x_i, r_i)) \leq a 5^n \sum_{i=1} \int_{B(x_i, r_i)} |f(t)| dt \leq \frac{5^n}{a} \int_{\bigcup_i B(x_i, r_i)} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{5^n}{a} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt = \frac{5^n}{a} \|f\|_1 \end{aligned}$$

を得るので、 $A = 5^n$ とすればよい。 □

命題 8. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $f \in L^1_{loc}$ についてほとんど至るところの x について

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(t) dt = f(x)$$

証明. 命題の主張は局所的なものなので適当にコンパクト集合に制限して最初から $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ としてもよい. まず、連続関数については定理が成り立つことに注意しよう。(積分の平均値の定理) $a > 0$ について

$$E_a = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(t) - f(x)) dt \right| > 2a \right\}$$

と定義する. コンパクト台を持つ連続関数は $L^1(\mathbb{R}^n)$ のなかで稠密なので, コンパクト台の連続関数 g で

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

となるものをとる. そして

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(t) - f(x)) dt \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(t) - g(t)) dt + \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (g(t) - g(x)) dt \\ & \quad + (g(x) - f(x)) \end{aligned}$$

から

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq M(f - g)(x) + |f(x) - g(x)|$$

が成り立つ. マルコフの不等式から

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{a} \|f - g\|_1 < \frac{1}{a} \varepsilon$$

を得る. そして

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(t) - g(t)| dt \leq M(f - g)(x)$$

が成り立つことに注意しよう. そして被覆補題から

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid a < M(f - g)(x)\}) \leq \frac{5^n}{a} \|f - g\|_1 < \frac{5^n}{a} \varepsilon$$

が成り立つ。さて

$$E_a \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x) - g(x)| > a\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < M(f - g)(x)\}$$

が成り立つので上での議論から

$$\mathcal{L}^n(E_a) \leq \frac{5^n + 1}{a} \varepsilon$$

が成り立つ。 ε は任意なので任意の $a > 0$ について E_a は零集合である。ここで

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(t) - f(x)) dt \right| = 0 \right\}$$

とすると $(\mathbb{R}^n \setminus S) \subset \bigcup_n E_{1/n}$ なので、ほとんど至る所で

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(t) dt = f(x)$$

が成り立つ。 □

命題 9. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ とほとんどいたるところの $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

証明. 任意の $q \in \mathbb{Q}$ について、

$$E_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(t) - q| dt = |f(x) - q| \right\}$$

と置く。 $S_q = \mathbb{R}^n \setminus E_q$ とすると $\mathcal{L}^n(S_q) = 0$ となる。 $S = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} S_q$ とすると $\mathcal{L}^n(S) = 0$ である。 任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ について命題 8 を用いて

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(x) - f(t)| dt \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (|f(t) - q| + |f(x) - q|) dt \\ & \leq 2|f(x) - q| \end{aligned}$$

を得る。 $q \in \mathbb{Q}$ は任意なので $|f(x) - q|$ は任意に小さくできる。つまり

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

となるから命題が成り立つ。 □

2 積分の変数変換公式

定理 10. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. $f : U \rightarrow V$ を同相写像とし、 a で全微分可能であるとする。このとき

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(f(B(a, r)))}{\mathcal{L}^n(B(a, r))} = |\det \mathbf{D}f(a)|$$

で成り立つ。

証明. f が平行移動の場合か、 f が基本行列 A を用いて $f(x) = Ax$ であるときに定理が成り立つことは $\mathcal{L}^n$ が n 個の $\mathcal{L}^1$ の直積測度であることと Fubini の定理からわかる (逐次積分). 可逆行列は基本行列のいくつかの積としてかけるので、以下では必要ならば U と V を可逆行列をかけて変数変換する操作を行って一般の場合を証明するし、そうしても一般性を失わない。また、 $C = \mathcal{L}^n(B(0, r))$ とすると $B(x, r) = (r \cdot E_n) \cdot B(0, r) + x$ なので上の議論から $\mathcal{L}^n(B(x, r)) = Cr^n$ となる。

必要ならば適当に U と V の座標を平行移動といくつかの基本行列をかけることによって変数変換して $a = f(a) = 0$ が成り立ち、 $Jf(a)$ は対角行列でその成分が 0 か 1 であるとしても良い (掃き出し法)。

Case 1: まず最初に $\mathbf{D}f(a)$ が単位行列の時を考える。

f が $a = 0$ で全微分可能なので任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分小さい r と任意の $x \in B(0, r)$ について

$$(1) \quad \|f(x) - x\| < \varepsilon \|x\|$$

が成り立つ。 $r > 0$ を $r < \delta$ とする。ここで $\|f(x)\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|$ であるので

$$f(B(x, r)) \subset B(0, (1 + \varepsilon)r)$$

が成り立つから

$$(2) \quad \mathcal{L}^n(f(B(0, r))) \leq C(1 + \varepsilon)^n r^n$$

である。

また $x \in B(0, r)$ について (1) から

$$(1 - \varepsilon)\|x\| < \|f(x)\|$$

である．ここで $x \in \partial B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ とすると

$$(3) \quad (1 - \varepsilon)r < \|f(x)\|$$

である．ここで f が同相写像であることから $f(\partial B(0, r)) = \partial f(B(0, r))$ なので

$$(4) \quad \partial f(B(0, r)) \cap B(0, (1 - \varepsilon)r) = \emptyset$$

が成り立つ．また， $f(0) = 0 \in B(0, (1 - \varepsilon)r)$ なので $B(0, (1 - \varepsilon)r)$ の連結性と (4) から

$$B(0, (1 - \varepsilon)r) \subset f(B(0, r))$$

が成り立つ．よって

$$(5) \quad C(1 - \varepsilon)^n r^n \leq \mathcal{L}^n(f(B(0, r)))$$

が成り立つ．(2) と (5) と $\mathcal{L}^n(B(0, r)) = Cr^n$ から

$$(1 - \varepsilon)^n \leq \frac{\mathcal{L}^n(f(B(0, r)))}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} \leq (1 + \varepsilon)^n$$

を得る．ゆえに

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(f(B(0, r)))}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} = 1$$

が成り立つ．

Case 2: 次に $Jf(0)$ が単位行列でない時に証明する．

$D = Jf(0)$ とおく．行列 D は $(1, 1)$ 成分が 0 としても良い．

この時 f が $a = 0$ で全微分可能であることから十分小さい r と任意の $x \in B(0, r)$ について

$$(6) \quad \|f(x) - Dx\| < \varepsilon \|x\|$$

が成り立つ． $i \in \{1, \dots, n\}$ について D の第 (i, i) 成分が 0 である場合には

$$|f_i(x)| < \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon r$$

が成り立つ．仮定から少なくとも $i = 1$ についてはこれが成り立つ．

他の場合について

$$|f_i(x) - x_i| \leq \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon r$$

を得る．ゆえに

$$|f_i(x)| \leq (1 + \varepsilon)r$$

となる.

以上の議論と $\varepsilon r < (1 + \varepsilon)r$ から

$$\mathcal{L}^n(f(B(0, r))) \leq C(1 + \varepsilon)^{n-1} \varepsilon r^n$$

である. よって

$$\frac{\mathcal{L}^n(f(B(0, r)))}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} \leq (1 + \varepsilon)^{n-1} \varepsilon$$

を得て, ε は任意であるから

$$\frac{\mathcal{L}^n(f(B(0, r)))}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} = 0 = |\det \mathbf{D}f(0)|$$

となる. 以上で証明が終わる. □

定理 11. $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ 開集合とし, v, m をそれぞれルベーグ測度を X, Y に制限したものとする. $f: X \rightarrow Y$ を C^1 級同相写像とし, f はいたるところ全微分可能で, X のゼロ集合を Y のゼロ集合に移すとする. このとき X 上の測度 μ を $\mu(S) = m(f(S))$ とすると (つまり $\mu = ((f^{-1})_* m)$ である)

$$\mu(S) = \int_S |\det(\mathbf{D}f(x))| dv(x)$$

がなりたつ

証明. まず f はゼロ集合をゼロ集合に写すので $\mu \ll v$ である. よってラドン・ニコディムの定理から

$$\mu(S) = \int_S D(x) dv(x)$$

となる可測関数 $D: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. ここでルベーグの微分定理 (命題 8) と定理 10 からほとんど至る所の x で

$$\begin{aligned} D(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} D(t) dt = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(f(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = |\det(\mathbf{D}f(x))| \end{aligned}$$

となる. よって

$$\mu(S) = \int_S |\det(\mathbf{D}f(x))| dv(x)$$

が成り立つ. □

定理 12 (変数変換公式). $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ 開集合とし, v, m をそれぞれルベーグ測度を X, Y に制限したものとする. $f: X \rightarrow Y$ を同相写像とし, f はいたるところ全微分可能で, X のゼロ集合を Y のゼロ集合に移す. この時, $h \in L^1(m)$ について

$$\int_X (h \circ f)(x) |\det \mathbf{D}f(x)| dv(x) = \int_Y h(y) dm(y)$$

証明. まず, A を Y の可測集合として $h = \chi_A$ と書かれる場合に証明する. つまり

$$\int_X (\chi_A \circ f)(x) |\det \mathbf{D}f(x)| dv(x) = \mathcal{L}^n(A)$$

を示そう. $B = f^{-1}(A)$ とおく. すると定理 11 から

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(f(B)) = \int_B |\det(\mathbf{D}f(x))| dv(x) = \int_X \chi_B(x) |\det(\mathbf{D}f(x))| dv(x)$$

である. そして $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)} = \chi_B$ なので,

$$\int_X (\chi_A \circ f)(x) |\det \mathbf{D}f(x)| dv(x) = \mathcal{L}^n(A)$$

が成り立つ.

以上の場合を用いると, h が単関数の場合も導かれる. そして, 単関数近似近似を用いれば h が一般の場合も証明できる. □

参考文献

- [1] ユルゲン・ヨスト著, 小谷元子訳, ポストモダン解析学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000.
- [2] 水谷義弘, 実解析入門, 培風館, 1999.