

Radon-Nikodym の定理

ナンブキトラ

2023 年 6 月 15 日

この文章では Radon-Nikodym の定理を証明する。

定義 1. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間とし, μ をその上の測度とする. このとき $L^p(\mu)$ で μ に関する L^p 関数全体を表す. つまり $f \in L^p(\mu)$ であるとは $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ であって可測であり,

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

を満たすものの全体である.

空間 $L^2(\mu)$ はヒルベルト空間になることに注意しよう.

補題 2. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間とし, α をその上の σ 有限な測度とする. このとき可測関数 $u: X \rightarrow (0, 1)$ で $y \in L^1(\alpha)$ を満たすものが存在する.

証明. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ を

- (1) 各 A_i は可測
- (2) $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i = X$
- (3) $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$
- (4) と任意の i について $\alpha(A_i) < \infty$

を満たすものとする. そして $u: X \rightarrow (0, 1)$ を

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}(x)}{2^n(1 + \alpha(A_n))}$$

と定義すれば求める条件は満たされる. □

定義 3. $(X, \mathfrak{M})$ を可測空間とし, α, β をその上の測度とする. このとき α が β に関して絶対連続であるとは, $\beta(A) = 0$ となる $A \in \mathfrak{M}$ について $\alpha(A) = 0$ となることである.

このとき $\alpha \ll \beta$ と表し, $\alpha \ll \beta$ かつ $\beta \ll \alpha$ になるとき $\alpha \equiv \beta$ と表す. この $\equiv$ は同値関係になる. また, ある $A \in \mathfrak{M}$ が存在して $\alpha(A) = 0$ と $\beta(X \setminus A) = 0$ を満たすときに α は β について特異的であるといい, $\alpha \perp \beta$ と書く. この $\perp$ は同値関係になる.

補題 4. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間とし, α, β, γ をその上の測度とする. もしも $\alpha \equiv \beta$ が成り立つならば以下が成り立つ.

- (1) $\beta \ll \gamma$ ならば $\alpha \ll \gamma$ が成り立つ.
- (2) $\gamma \ll \beta$ ならば $\gamma \ll \alpha$ が成り立つ.
- (3) $\beta \perp \gamma$ ならば $\alpha \perp \gamma$ が成り立つ.

証明. 証明は省略する. □

補題 5. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間とし, α をその上の測度とし, $\phi \in L^1(\alpha)$ とする. そして測度 β を

$$(1) \quad \beta(E) = \int_E \phi \, d\alpha$$

と定義すると, $\beta \ll \alpha$ であり, 任意の $f \in L^1(\beta)$ について

$$\int_X f \, d\beta = \int_X f\phi \, d\alpha$$

が成り立つ. また測度 β についてある ϕ が存在して (1) のように表されるのならば $\beta \ll \alpha$ となる.

証明. β の定義から任意の $E \in \mathfrak{M}$ について

$$\int_X \chi_E \, d\beta = \int_X \chi_E \phi \, d\alpha$$

が成り立つ. つまり特性関数については補題の結論は成り立つ. このことから単関数についても成り立つし, 単関数近似から一般の可測関数についても成り立つ. 後半は明らかである. □

補題 6 (リースの表現定理). $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ をヒルベルト空間とする. このとき任意の連続な線形写像 $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $a \in H$ が存在して任意の $x \in H$ について $f(x) = \langle x, a \rangle_H$ が成り立つ.

以下の定理がラドン・ニコディムの定理である.

定理 7. $(X, \mathfrak{M})$ を測度空間とし, μ, ν をその上の σ 有限な測度とする. このとき $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度 ν_a と ν_s が存在して以下を満たす.

- (1) $\nu_s \perp \mu$ と $\nu_a \ll \mu$ を満たす.
- (2) (1) のような分解は一意的である.
- (3) 可測関数 $D : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して任意の $A \in \mathfrak{M}$ について $\nu_a(A) = \int_A D \, d\mu$ が成り立つ.

証明. (2) はすぐにわかる.

(1) を示そう. 補題 2 から $s, t : X \rightarrow (0, 1)$ を $s \in L^1(\mu)$ で $t \in L^1(\nu)$ を満たすものとする. そして $(X, \mathfrak{M})$ 上の測度 λ, θ を

$$\lambda(A) = \int_A s \, d\mu$$

$$\theta(A) = \int_A t \, d\nu$$

と定義する. λ, θ は有限測度であることに注意しよう. また

$$(2) \quad \mu(A) = \int_A \frac{1}{s} \, d\lambda$$

$$(3) \quad \nu(A) = \int_A \frac{1}{t} \, d\theta$$

なので $\lambda \equiv \mu$ と $\theta \equiv \nu$ に注意しよう. $\phi = \lambda + \theta$ と定義する. すると, コーシーシュワルツの不等式から $f \in L^2(\phi)$ に対して

$$\left| \int_X f \, d\theta \right| \leq \int_X |f| \, d\theta \leq \int_X |f| \, d\phi \leq \phi(X) \cdot \sqrt{\int_X |f|^2 \, d\phi} < \infty$$

を得る. ここで $s \in L^1(\mu), t \in L^1(\nu)$ なので $\phi(X) = \lambda(X) + \theta(X) < \infty$ であることを用いている. よって $f \in L^2(\phi)$ に対して $\int_X f \, d\theta$ と定義される線形形式は $L^2(\phi)$ 上の有界作用素となる. よって $L^2(\phi)$ がヒルベルト空間であることから補題 6 を使うと任意の $f \in L^2(\phi)$ に対して

$$(4) \quad \int_X f \, d\theta = \int_X f g \, d\phi$$

となる $g \in L^2(\phi)$ が存在する. さて $\phi(E) > 0$ となる可測集合 E について, $f = \chi_E$ とすると

$$\int_E g \, d\phi = \theta(E)$$

となる．よって特に

$$(5) \quad 0 \leq \frac{1}{\phi(E)} \int_E g \, d\phi \leq 1$$

となる．ここで，背理法のために $S = \{x \in X \mid 1 < g(x)\}$ が ϕ に関して正の測度を持つと仮定しよう． ϵ に対して $T_\epsilon = \{x \in X \mid 1 + \epsilon < g(x)\}$ と仮定すると

$$S = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} T_\epsilon$$

が成り立つ．よってある $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ が存在し， $T_\epsilon = \{x \in X \mid 1 + \epsilon < g(x)\}$ が ϕ に関して正の測度をもつ．よって式 (5) から

$$1 < 1 + \epsilon \leq \frac{1}{\phi(T_\epsilon)} \int_{T_\epsilon} g \, d\phi \leq 1$$

となり矛盾する．よってほとんど至る所 $g \leq 1$ である．同様にほとんど至る所 $0 \leq g$ であることがわかる．つまりほとんど至る所 $0 \leq g(x) \leq 1$ である．さて式 (4) を変形して

$$(6) \quad \int_X f(1 - g) \, d\theta = \int_X fg \, d\lambda$$

を得る．ここで $A = \{x \in X \mid 0 \leq g(x) < 1\}$, $S = \{x \in X \mid g(x) = 1\}$ と定義して $\theta_a(E) = \theta(E \cap A)$, $\theta_s(E) = \theta(E \cap S)$ と定義する．式 (6) において $f = \chi_S$ とすれば， $\lambda(S) = 0$ を得るので $\theta_s \perp \lambda$ がわかる．さて， h を

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1-g(x)} & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する．各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $E \in \mathfrak{M}$ について式 (6) において $f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_{E \cap A}$ とおくと

$$\int_{E \cap A} 1 - g^{n+1} \, d\theta = \int_{E \cap A} g(1 + g + \cdots + g^n) \, d\lambda$$

を得る．この式で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\theta_a(E) = \theta(E \cap A) = \int_E h \, d\lambda$$

を得る．よって $\theta_a \ll \lambda$ である．ここで

$$\nu_a(A) = \int_A \frac{1}{t} \, d\theta_a$$

$$\nu_s(A) = \int_A \frac{1}{t} d\theta_s$$

とすれば $\nu_a \equiv \theta_a$ と $\nu_s \equiv \theta_s$ であり式 (3) から $\nu_a + \nu_s = \nu$ となり, $\lambda \equiv \mu$ から $\nu_a \ll \mu$ と $\nu_s \perp \mu$ が成り立つ.

(3) を示そう. 今

$$\nu(E) = \int_E \frac{1}{t} d\theta$$

なので

$$\nu_a(E) = \int_E \frac{1}{t} d\theta_a = \int_E \frac{h}{t} d\lambda = \int_E \frac{sh}{t} d\mu$$

となるから

$$D = \frac{sh}{t}$$

とすれば良い. □

参考文献

- [1] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGRAW-Hill.