

多項式に関する一致の定理

ナンブキトラ

2022 年 9 月 6 日

この文章では多項式に関する一致の定理を証明する．つまり実係数多項式 p の零点全体の集合が内点を持つならば恒等的に 0 に等しいことを証明する．

まず最初に初等的な行列式の計算を行う．

定理 1 (ファンデルモンドの行列式). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．このとき任意の $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

が成り立つ．

証明. n に関する帰納法で証明する． $n + 1$ より小さい数では成り立つと仮定する．このとき第 1 行を各行から引くと

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} & x_n^n - x_1^n \\ 0 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} & x_{n+1}^n - x_1^n \end{vmatrix}$$

となる．計算は次のページに続く

さらに行列式の展開の性質から

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} & x_n^n - x_1^n \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} & x_{n+1}^n - x_1^n \end{vmatrix}$$

となる. ここで第 k 列の $-x_1$ 倍を $k+1$ 列に足すと最後の兩列式は

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} & x_n^n - x_1^n \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} & x_{n+1}^n - x_1^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} & x_n^n - x_1 x_n^{n-1} \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1 x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-1}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-1}(x_n - x_1) \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1} - x_1) & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 < j} (x_j - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

となるので証明が終わる. □

別証明. 与えられた行列式を $p_n(x_1, \dots, x_n)$ とするとこれは $x_1, \dots, x_n$ に関する多項式でしかも各 x_i に関する最高次数は $n-1$ である. さて, 行列式の性質から $x_i = x_j$ とすると $p_n = 0$ となる. ゆえに p_n は $x_j - x_i$ を因数にもつ. よって多項式 $q_n = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ によって p_n を割り切ることができる. ここで多項式 q_n について各 x_i の最高次数は $n-1$ であるから p_n は q_n の定数倍であることがわかる. つまり $p_n = a_n q_n$ となる $a_n \in \mathbb{R}$ が

存在する．簡単に $a_1 = 1$ がわかり，また $n + 1$ の場合に $x_1 = 0$ とすると

$$p_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{j>1} x_j \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{j>1} x_j \right) \cdot p_n(x_2, \dots, x_{n+1})$$

となり，また

$$q_{n+1}(0, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{j>1} x_j \right) \cdot q_n(x_2, \dots, x_n)$$

なので $a_{n+1} = a_n$ がわかり，結局 $a_n = 1$ がわかるので，定理は成り立つ． $\square$

定理 2 (多項式に関する一致の定理). p を n 変数の実係数多項式とする．もしも p の零点全体の集合 Z が内点を持つならば p は恒等的に 0 となる．つまり p が定数 0 に等しくないならば $p(x) \neq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ 全体の集合は $\mathbb{R}^n$ のなかで稠密になる．

証明その 1. n に関する帰納法で証明する． $n + 1$ より小さい数では命題が成り立つと仮定する． $p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ についてこれは多項式なので， x_{n+1} に関する最高次数を m として $x = (x_1, \dots, x_n)$ として以下のように表すことができる．

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^m q_i(x) x_{n+1}^i$$

ここで各 q_i は x の多項式である．今 p の零点全体を Z と書くと， Z は内点を持つので開集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ と開集合 $U \subset \mathbb{R}$ が存在して $V \times U \subset Z$ となる． U から相異なる点 $t_1, \dots, t_{m+1} \in U$ を取ると $k \in \{1, \dots, m+1\}$ と $x \in V$ について

$$\sum_{i=0}^m q_i(x) t_k^i = p(x, t_k) = 0$$

となる．これは次のように書くことができる．

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

先の定理から左辺に出てくる行列は可逆であることがわかるので、結局任意の $x \in U$ と $i \in \{1, \dots, m\}$ について $q_i = 0$ がわかる。よって各 q_i の零点全体は内点を持つことがわかったので帰納法の仮定より、各 q_i は恒等的に 0 に等しい。よって p も恒等的に 0 に等しい。 $\square$

証明その 2. 上の証明と同じく帰納法で証明する。同じ記号を用いる。 Z の元を $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ の元で近似できれば良い。 $(x, t) \in Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ とする。この時

$$\sum_{i=0}^m q_i(x) t^i = 0$$

となる。

Case1 : ある $k \in \{0, \dots, m\}$ について $q_k(x) \neq 0$ の場合。このときは $p(x, t)$ を t の多項式として見れば一変数なので一変数の場合から t に十分近い $t' \in \mathbb{R}$ であって $p(x, t') \neq 0$ となるものが存在する。よって (x, t') が求める $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ の元である。

Case2: 全ての $i \in \{1, \dots, m\}$ について x が q_i の零点だった場合。このときには帰納法の仮定より x に十分近い各 q_i の非零点になっているような $x' \in \mathbb{R}^n$ が存在する。 $p(x', t) \neq 0$ の場合は $(x', t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ が求めるものになっている。 $p(x', t) = 0$ の場合には Case1 に還元される。 $\square$

証明その 3. $n = 1$ の時には n 次多項式は高々 n 個の零点を持たないことから定理が成り立つことがわかる。次に一般の n について考える。 Z の内点を a とする。このとき十分小さい $r \in \mathbb{R}$ が存在して開円盤 $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 < r\}$ は Z の部分集合となる。ここで $u \in B$ を任意にとり $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $q(t) = p(a + u \cdot t)$ と定義する。すると q は t に関する多項式であり、 p が B 上で 0 になることから q は $t \in (-1, 1)$ の時 $q(t) = 0$ となる。よって 1 変数の場合から q は恒等的に 0 になる。 $u \in B$ は任意だったので p は全空間で恒等的に 0 になる。 $\square$

証明その 4. まず最初に $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$ として多項式 $P(x, y)$ は y の一次式で割り算できることに注意しよう。さて、 $p(x, y)$ の零点が内点を持つとする。内点 (a, b) について $p(x, b)$ は n 変数として見たときに内点をもつよって帰納法の、仮定より $p(x, b)$ は恒等的に 0 になる。つまり $y = b$ は $p(x, y)$ の零点になるので $p(x, y)$ は $(y - b)$ を因数に持つ。 $p(x, y)$ の次数を m として相異なる点 $b_1, \dots, b_{m+1}$ を任意の x について $p(x, b_i) = 0$ となるようにとると n 変数多項式 Q が存在して $p(x, y) = (y - b_1) \dots (y - b_m) Q(x)$ となる。ここで $y = b_{m+1}$ とすると $0 = (b_{m+1} - b_1) \dots (b_{m+1} - b_m) Q(x)$ なので Q は恒等的に 0 になる。つまり p も恒等的に 0 になる。 $\square$

証明その 5. 多項式は解析関数だから解析関数の一致の定理から従う．解析関数に関する一致の定理は [3] や [4] を参照のこと． □

参考文献

- [1] StackExchange の質問 “The complement of a zero-set of a polynomial is dense” とその回答

<https://math.stackexchange.com/questions/2025978/the-complement-of-a-zero-set-of-a-polynomial-is-dense>

- [2] StackExchange の質問 “Why if $p(x_1, \dots, x_n)$ is polynomial on $\mathbb{R}^n$, then $p(x) \neq 0$ is satisfied open dens set? ” とその回答

<https://math.stackexchange.com/questions/1731267/why-if-p-x-1-dots-x-n-is-polynomial-on-mathbbbrn-then-p-x-neq-0/1731288>

- [3] はてなブログ「電波通信」の記事「実解析関数に関する逆関数定理」<https://conscious4410.hatenablog.com/entry/2021/02/28/130208>

- [4] 箱さんの web ページの「解析関数のノート」<https://o-ccah.github.io/docs/analytic-function.html>