

対角的交叉と Fodor の補題

ナンブ キトラ

2021 年 5 月 22 日

この文章では対角的交叉の基本的性質と Fodor の補題を証明する。

定義 1 (club 集合). κ を基数とする. κ の非空で非有界な閉集合を club 集合という. “club” とは **C**losed **U**n**B**ounded という意味である.

定義 2. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, κ を基数とする. このとき κ^n の部分集合 A が対角的に非有界であるとは任意の $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < \kappa$ について

$$A \cap \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \kappa)^n \neq \emptyset.$$

を満たすときにいう.

命題 3. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, κ を $\omega_0 < \text{cf}(\kappa)$ を満たす基数とする. そして A と B を κ^n の対角的に非有界な閉部分集合とする. このとき $A \cap B$ も対角的に非有界な閉集合である.

証明. $A \cap B$ が閉集合であることはわかるので対角的に非有界であることを示せば良い. 任意に $\lambda \in \kappa$ を与えると非有界性から $[\lambda, \kappa)^n \cap A \neq \emptyset$ である. そこで $a(0) \in [\lambda, \kappa)^n \cap A$ をとる. $a(0) = (a_1(0), \dots, a_n(0))$ と成分表示されているとする. 次に B が対角的に非有界であることから $(\prod_{i=1}^n [a_i(0), \kappa)) \cap B \neq \emptyset$ であるのでここから元 $b(0)$ をとる. 一般に $a(m)$ まで構成されたときに

$$b(m) \in \prod_{i=1}^n [a_i(m), \kappa) \cap B$$

と定義し, $b(m)$ まで構成されたときに

$$a(m+1) \in \prod_{i=1}^n [b_i(m), \kappa) \cap A$$

と定義する. このようにして A 内の点列 $\{a(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ と B 内の点列 $\{b(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ を得る. そして構成の仕方から各 $i \in \{1, \dots, n\}$ について

$$a_i(m) \leq b_i(m) \leq a_i(m+1) \leq b_i(m+1)$$

なので任意の i について $\sup_{m \in \mathbb{N}} a_i(m) = \sup_{m \in \mathbb{N}} b_i(m)$ である. これを μ_i とおき, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ と定義すると $\mu \in [\lambda, \kappa)^n$ であり, また $\omega_0 < \text{cf}(\kappa)$ から $\mu_i < \kappa$ である. A と B が閉集合であることから $\mu \in A$ かつ $\mu \in B$ なので $\mu \in A \cap B$ である. よって $A \cap B$ は非有界である. $\square$

命題 4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, κ を基数とする. そして $\{F_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ は κ で添字付けられた κ の閉集合族であり, 任意の $\lambda \in \kappa$ について

$$F_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} F_\alpha$$

を満たすとする. このとき κ^2 の部分集合

$$\bigcup_{\alpha < \kappa} \{\alpha\} \times F_\alpha$$

は κ^2 の閉集合である.

証明. $S = \bigcup_{\alpha < \kappa} \{\alpha\} \times F_\alpha$ とする. $(x, y) \notin S$ とすると $y \notin F_x$ である. 仮定より

$$y \notin \bigcap_{\alpha < x} F_\alpha$$

なので $\alpha < x$ が存在して $y \notin F_\alpha$ である. よって $(\beta, y] \cap F_\alpha = \emptyset$ となる β が存在する. このとき $\{F_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ の単調減少性から任意の $\gamma \in [\alpha, x]$ について $(\beta, y] \cap F_\gamma = \emptyset$ である. つまり $(\alpha, x] \times (\beta, y] \cap S = \emptyset$ となる. x, y は任意であったので S が閉集合であることがわかる. $\square$

定義 5. κ を基数とし, $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ を κ の部分集合族とする. このとき

$$\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\lambda \in \kappa \mid \forall \alpha < \lambda \lambda \in X_\alpha\}$$

と定義する. この $\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ を $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ の対角的交叉と呼ぶ.

定理 6. κ を正則基数とし, $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ を κ の club 集合の族とする. このとき $\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ は κ の club である.

証明. 任意の $\lambda < \kappa$ について

$$F_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

と定義する. κ が正則であることと各 X_α が club であることから各 F_α も club である. このとき

$$S = \bigcup_{\alpha < \kappa} \{\alpha\} \times F_\alpha$$

とするとこれは命題 4 より κ^2 の閉集合であり, さらに各 F_α が club であることから S は対角的に非有界である. さて

$$\bigtriangleup_\kappa = \{(x, x) \mid x < \kappa\}$$

とすると $\bigtriangleup_\kappa$ は明らかに κ の対角的に非有界な閉集合である. ここで $\pi_1 : \bigtriangleup_\kappa \rightarrow \kappa; (x, x) \mapsto x$ は同相写像であることに注意しよう.

命題 3 より $S \cap \bigtriangleup_\kappa$ は対角的に非有界な閉集合であり,

$$\pi_1(S \cap \bigtriangleup_\kappa) = \bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$$

なので $\bigtriangleup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ が club であることがわかった. $\square$

定義 7 (定常集合). κ を基数とする. κ の部分集合 S は κ の任意の club 集合と交わりを持つとき, 定常集合という.

定理 8 (Fodor's lemma). κ を正則基数とする. S を κ の定常集合とし, $f: S \rightarrow \kappa$ は任意の $\alpha \in S$ について $f(\alpha) < \alpha$ を満たしているとする. このときある $\beta \in f(S)$ が存在して $f^{-1}(\beta)$ は定常集合になる.

証明. 背理法による. 各 $\alpha \in f(S)$ に対して $f^{-1}(\alpha)$ が定常集合ではないとしよう. このとき κ の club 集合 X_α が存在して $X_\alpha \cap f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ となる. $\alpha \notin f(S)$ に対しては $X_\alpha = \kappa$ と定義することにする. さて定理 6 より $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ は club になる. よって $\beta \in \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \cap S$ をとることができる. $\gamma = f(\beta)$ とおくと仮定より $\gamma < \beta$ である. $\beta \in \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ より $\beta \in X_\gamma$ であるが, $\beta \in f^{-1}(\gamma)$ でもあるので, X_γ の定義に反する. よって定理が成り立つ. $\square$

参考文献

[1] 寺澤順, 現代集合論の探求, 日本評論社 (2013)