

特別な積分の球値

ナンプ キトラ

2022 年 1 月 21 日

この文章では特殊な積分の値を求める．この文章では積分は全てルベグ積分である．

1 ディリクレ積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

積分の計算方法として Feynman's integral trick もしくは Differentiation under integral sign と呼ばれるものがある．これは積分 $\int_X f(x) dx$ を求める際に， $K(x, 0) = 1$ となる関数 $K(x, t)$ を用いて $I(t) = \int_X K(x, t) f(x) dx$ と定義して， I が満たす微分方程式を解いて $I(t)$ を求めた上で， $I(0) = \int_X f(x)$ を得る方法である．この方法は物理学者ファインマンの自伝「ご冗談でしょ，ファインマンさん」[2] の「毛色の違った道具」という章で言及され，よくわからん積分の問題が出たらファインマンのところにお鉢が回ってきてこの方法で解いたということが記されている．こうしたことからファインマンの名前がついているようだが，[2] の同じ章で言及されている通りファインマンは Woods の解析の教科書 [3] を参考にこの方法を身につけており，実際 Woods の本にもこの方法が記されている．

この計算方法の例としてよく取り上げられるのが，ディリクレ積分と呼ばれる $\int_0^\infty \sin x/x dx$ を求める次の方法である．数学的に怪しい部分があるものをまず最初に紹介する．

Feynman's integral trick を用いたディリクレ積分の球値？．各 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$F(t) = \int_0^\infty \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} dx$$

と定義する．このとき微分と積分を交換して

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \right) dx = - \int_0^\infty \exp(-tx) \sin(x) dx$$

を得る．このとき

$$F'(t) = - \int_0^{\infty} \exp(-tx) \sin(x) \, dx = \left[\frac{\cos x + t \sin x}{1 + t^2} \exp(-tx) \right]_{x=0}^{\infty} = - \frac{1}{1 + t^2}$$

なので， $F(\infty) = 0$ を用いて

$$F(t) = F(t) - F(\infty) = \int_{\infty}^t F'(s) \, ds = \int_{\infty}^t \frac{-1}{1 + s^2} \, ds = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx &= \int_0^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる． □

上の議論は計算結果だけ見ると正しいが，実は数学的に不確かな部分がある．微分と積分を交換した部分ではない．その部分はルベグの収束定理を用いると簡単に正当化できる．どこが微妙なのかと言えば

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \, dx$$

の部分である．実は x の関数 $\sin x/x$ はルベグ可積分ではなく， $\int_{\mathbb{R}} |\sin x|/|x| \, dx = \infty$ となる．よってルベグの収束定理が適用できず，この積分と極限の記号の交換の正当性は微妙である．そもそも $\sin x/x$ が可積分ではないのにルベグ積分を基礎にした場合，ディリクレ積分は一体どのように定義されているのかという問題もある．ここでは

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

というのは

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

という意味だとすることにして，この値を求める方法を考えよう．（広義リーマン積分だと思えば別に間違いというわけでもない）．これを踏まえて改めて Feynman's integral trick を用いて証明しよう．

Feynman's integral trick を用いたディリクレ積分の球値. 任意の $R \in [1, \infty)$ と $t \in [0, \infty)$ に対して

$$F_R(t) = \int_0^R \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} dx$$

と定義する. 任意の R について $t \in (0, \infty)$ のとき微分と積分を交換して

$$\frac{d}{dt} F_R(t) = \int_0^R \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \right) dx = - \int_0^R \exp(-tx) \sin(x) dx$$

を得る. この等式はルベークの収束定理を用いると正当化できる. さて,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_R(t) &= - \int_0^R \exp(-tx) \sin(x) dx = \left[\frac{\cos x + t \sin x}{1 + t^2} \exp(-tx) \right]_{x=0}^{x=R} \\ &= \frac{\cos R + t \sin R}{1 + t^2} \exp(-tR) - \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned}$$

なので, $F_R(\infty) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} F_R(t) &= F_R(t) - F_R(\infty) = \int_{\infty}^t F'_R(s) ds = \int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds + \int_{\infty}^t \frac{-1}{1 + s^2} ds \\ &= \int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds + \frac{\pi}{2} - \arctan t \end{aligned}$$

となる. 任意の R について $[0, R]$ 上で $\sin x/x$ は可積分だからルベークの収束定理から

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^R \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} dx$$

がわかる. よって

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0} F_R(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds + \frac{\pi}{2} - \arctan t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds \end{aligned}$$

となる. ここで最右辺の第二項を調べてみよう. まずルベークの収束定理から,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\infty}^t \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds = \int_{\infty}^0 \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds$$

である。よって

$$\left| \int_{\infty}^0 \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds \right| \leq \int_0^{\infty} (1 + s) \exp(-sR) ds \\ \leq \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}$$

以上から、

$$\left| \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| \leq \left| \int_{\infty}^0 \frac{\cos R + s \sin R}{1 + s^2} \exp(-sR) ds \right| \leq \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}$$

がわかるので、 $R \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。これで証明が終わる。 □

2 ガウス積分

ガウス積分とは

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx$$

のことである。有名なこの積分の値は $\sqrt{\pi}$ になる。大学で習うこの積分の典型的な求め方は多変数化して極座標へと変換して積分を求めることである。もう一つ筆者が客観的に見て簡単と言える方法にベータ関数を使う方法がある。 $\Gamma(1/2)$ を求めるとガウス積分の値もわかるのだが、 $\Gamma(1/2)$ は $B(1/2, 1/2)$ を用いて求めることができ、この値は初等的な積分になっているのである。ガンマ関数やベータ関数の基本的な性質は [4] を参照のこと。この本はものすごくいい本なのでとてもおすすめする。ただし日本語訳は絶版の様子なので、英語訳版なども参照されたい。日本円で千円前後で入手できるだろう。

まず、被積分関数が偶関数であることから

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることを証明できれば良いことに注意しよう。今から紹介する方法はラプラス [1] を参考にしている。証明には積分の順序交換を用いる。

ラプラスの方法によるガウス積分の球値. $x \exp(-x^2(y^2 + 1))$ を積分する.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp(-x^2(y^2 + 1)) \, dx dy &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + 1} \exp(-x^2(y^2 + 1)) \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + 1} \, dy = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

積分の順序を交換して

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp(-x^2(y^2 + 1)) \, dy dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp(-(xy)^2) \exp(-x^2) \, dy dx \\ &= \int_0^\infty \exp(-x^2) \int_0^\infty x \exp(-(xy)^2) \, dy dx \end{aligned}$$

となることがわかる. さて, $\int_0^\infty x \exp(-(xy)^2) \, dy$ について $t = xy$ と置換積分をすると

$$\int_0^\infty x \exp(-(xy)^2) \, dy = \int_0^\infty \exp(-t^2) \, dt$$

なので

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty x \exp(-x^2(y^2 + 1)) \, dy dx &= \int_0^\infty \exp(-x^2) \int_0^\infty \exp(-t^2) \, dt dx \\ &= \int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx \int_0^\infty \exp(-t^2) \, dt \\ &= \left(\int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx \right)^2 \end{aligned}$$

よって

$$\left(\int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

なので,

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

がわかる. □

ガウス積分に関連して以下のことがわかる.

命題 1. $a > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2) \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

この等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

において a を変数とみて微分をして積分と微分の順序を入れ替えると次のことがわかる.

系 2. $a > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}$$

特に次の確率論的に関連深い等式が得られる.

系 3. $m \geq 0$ $\sigma > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma$$

3 フーリエ変換

このセクションでは正規分布の確率密度関数のフーリエ変換を具体的に決定する. つまり正規分布の特性関数を求めるということである. $f_{m,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を $N(m, \sigma)$ の確率密度関数とする. つまり

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

である. このとき

$$F_{m,\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma}(y) \exp(\sqrt{-1}xy) dy$$

とおくことにする.

まず最初に次を証明する.

命題 4.

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

証明. まず

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy$$

とおく. この F を微分する. ルベークの収束定理から F は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数であることに注意しよう. また同じくルベークの収束定理から微分と積分の値が交換できることに注

意しよう.

$$\frac{d}{dx}F(x) = \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} y \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy$$

である. 部分積分を用いると

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} y \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) \right]_{y=-\infty}^{y=\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{-1}x \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy \\ &= \frac{\sqrt{-1}x}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) \exp(\sqrt{-1}xy) dy = \frac{\sqrt{-1}x}{2} F(x) \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{d}{dx}F(x) = -\frac{x}{2}F(x)$$

がわかる. この微分方程式を解くと

$$F(x) = F(0) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

がわかる. □

定理 5. $m \in [0, \infty)$ で $\sigma \in (0, \infty)$ とする. このとき

$$\int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma}(y) \exp(\sqrt{-1}xy) dy = \exp\left(\sqrt{-1}mx - \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)$$

$$F_{m,\sigma}(x) = \exp\left(\sqrt{-1}mx - \frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)$$

となる. 特に

$$F_{0,\sigma} = \exp\left(-\frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)$$

であり,

$$F_{0,1} = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

である.

証明. まず,

$$\begin{aligned} F_{m,\sigma}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma}(y) \exp(\sqrt{-1}xy) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\sqrt{-1}xy) dy \end{aligned}$$

である. $t = y - m$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} F_{m,\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\sqrt{-1}x(t+m)) dt \\ &= \exp(\sqrt{-1}xm) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\sqrt{-1}xt) dt \\ &= \exp(\sqrt{-1}xm) F_{0,\sigma}(x) \end{aligned}$$

なので結局

$$F_{0,\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 x^2}{2}\right)$$

を示せば良い.

$$F_{0,\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \exp(\sqrt{-1}xy) dy$$

ここで

$$z = \frac{y}{\sqrt{2\sigma^2}}$$

と変数変換し, $F(x) = \sqrt{\pi} \exp(-x^2/4)$ とすると命題 4 から

$$\begin{aligned} F_{0,\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-z^2) \exp(\sqrt{-1}(\sqrt{2\sigma^2}x)z) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} F(\sqrt{2\sigma^2}x) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

を得るから定理が示された. □

参考文献

- [1] P. I. Laplace 著, 伊藤清, 樋口順四郎約・解説ラプラス確率論, 現代数学の系譜 1 2, 1986, 共立出版.
- [2] リチャード・ファインマン著, 大貫昌子約, ご冗談でしょう, ファインマンさん I, 1986, 岩波書店.

- [3] F. S. Woods, *Advanced calculus*, 1954, GINN AND COMPANY.
- [4] E. アルティン著, 上野健爾訳・解説, ガンマ関数入門, 2002, 日本評論社.

「知識は公共財」