

van der Waerden Theorem and Ramsey Theorem

電波通信

2021 年 2 月 2 日

この文章では van der waerden の定理と Ramsey の定理を証明し，コンパクト性原理とも呼ばれる Rado の選択定理を紹介する．

1 van der Waerden's Theorem

このセクションでは特に断らない限りは，自然数 a, b について $[a, b] = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$ とする．

二つの m 対 $(x_i), (y_i) \in [0, l]^m$ が l -同値であるとは，値が l であるような最後の番号までこの二つが一致していることとする．つまり，

$$\forall j \in \{n \mid x_n = l\} \cup \{n \mid y_n = l\} \quad \forall i \leq j \quad x_i = y_i$$

この同値類による代表元は $(*, *, \dots, *, l, 0, 0, \dots, 0)$ という形のものを選ぶ．

任意の $m, l \in \mathbb{N}_+$ に対して，次の主張を $S(l, m)$ とかこう：任意の $r \in \mathbb{N}_+$ に対して $N(l, m, r) \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の写像 $[1, N(l, m, r)] \rightarrow [1, r]$ に対して $a, d_1, d_2, \dots, d_m$ が存在し，任意の $(x_i) \in [0, l]^m$ に対して $a + \sum_{i=1}^m x_i d_i \leq N(l, m, r)$ であり，かつ $C(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i)$ は l -同値類上で定数となる．

補題 1. $S(l, 1)$ と $S(l, m)$ が成立するならば， $S(l, m+1)$ が成立する．

証明. r を固定する． $M = N(l, m, r)$ とし， $N = N(l, 1, r^M)$ とする．そして，写像 $C : [1, MN] \rightarrow [1, r]$ が与えられているとする．さてこのとき，写像 $D : [1, N] \rightarrow [1, r]^M \cong [1, r^M]$ を以下のように定義する． $g, h \in [1, N]$ について $D(g) = D(h)$ とは任意の $j \in [0, M-1]$ について

$$C(gM - j) = C(hM - j)$$

が成り立つこととする． N の定義から，ある $q, k \in \mathbb{N}_+$ が存在して任意の $x \in [0, l-1]$ について $q+xk \leq N$ であり， $D(q+xk)$ が定数となる．さて， $S(l, m)$ を区間 $[(q-1)M+1, qM]$ に対して適応する．すると，ある $a, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}_+$ が存在して， $a + \sum_{i=1}^m x_i d_i \in [(q-1)M+1, qM]$ であり， $C(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i)$ は l -同値類上で定数になる． q, k の定義から任意の $x \in [0, l-1]$ について

$$D(q+xk) = D(q)$$

が成り立ち，このことと D の定義から任意の $b \in [1, M]$ について

$$C((q-1)M+b+xkM) = C((q-1)M+b)$$

が成り立つ．次に $d_{m+1} = kM$ として， $a, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}$ が求める条件を満たすことを確かめよう．任意に $(x_i) \in [0, l]^{m+1}$ とすると，

$$a + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i \leq a + \sum_{i=1}^m x_i d_i + x_{m+1} k d_{m+1} \leq qM + lkM = (q+lk)M \leq MN$$

である．任意に $(x_i) \in [0, l]^{m+1}$ をとる．

Case1 $x_{m+1} < l$ のとき， $a + \sum_{i=1}^m x_i d_i \in [(q-1)M+1, qM]$ と先に示したことから，

$$C\left(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i + x_{m+1} d_{m+1}\right) = C\left(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i\right)$$

となるので， l -同値類の上で定数となる．

Case2 $x_{m+1} = l$ のとき．このときは (x_i) の l -同値類は一個しかないから証明することはない．

以上で補題が示された． □

以下では一般に $\sum_{i=1}^0 f_i = 0$ であることに注意せよ．

補題 2. 任意の m について $S(l, m)$ が成立するならば， $S(l+1, 1)$ が成立する．

証明. r を固定する．簡単のために $N = N(l, r, r)$ とする．さて，任意に $C : [1, 2N] \rightarrow [1, r]$ をとる．すると， $a, d_1, \dots, d_r$ が存在して任意の $(x_i) \in [0, l]^r$ について $a + \sum_{i=1}^r x_i d_i \leq N$ であり， $C(a + \sum_{i=1}^r x_i d_i)$ は l -同値類上で定数となる．

$w \in [0, r]$ について

$$C\left(a + \sum_{i=1}^w l d_i\right)$$

を考えよう．彩色は r 個で， $[0, r]$ は $r+1$ 個あるので，ある $u, v \in [0, r]$ が存在して $u < v$ と

$$C\left(a + \sum_{i=1}^u ld_i\right) = C\left(a + \sum_{i=1}^v ld_i\right)$$

である． $x \in [0, l]$ を任意に与える， $x < l$ のときには $(l, \dots, l, x, \dots, x)$ は $(l, \dots, l, 0, \dots, 0)$ と l -同値なので

$$C\left(\left(a + \sum_{i=1}^u ld_i\right) + x\left(\sum_{i=u+1}^v d_i\right)\right) = C\left(a + \sum_{i=1}^u ld_i\right)$$

また， $x = l$ のときは $C(a + \sum_{i=1}^u ld_i) = C(a + \sum_{i=1}^v ld_i)$ なので， $q = (a + \sum_{i=1}^u ld_i)$ ， $k = (a + \sum_{i=1}^v ld_i)$ として， $S(l+1, 1)$ の成立がわかる． $\square$

以上の補題から次のことがわかる．

定理 3. 任意の $l, m \in \mathbb{N}_+$ について， $S(l, m)$ が成り立つ．

van der Waerden の定理とは次の主張のことである．

定理 4 (van der Waerden theorem). 任意の $l, r \in \mathbb{N}_+$ に対して $n(l, r) \in \mathbb{N}_+$ が存在して，任意の $C: [1, n(l, r)] \rightarrow [1, r]$ に対してある $w \in [1, r]$ が存在して， $C^{-1}(w)$ は長さ l の等差数列を含む．

この van der Waerden の定理は $\forall l \in \mathbb{N}_+ S(l, 1)$ が成り立つということと同値であるから，上の定理から成立がすぐにわかる． m という補助パラメーターを用いて，証明を簡略化しているのである．

系 5 (infinite van der Waerden theorem). 任意の $r \in \mathbb{N}_+$ と任意の彩色 $C: \mathbb{N}_+ \rightarrow [1, r]$ についてある $w \in [1, r]$ が存在して $C^{-1}(w)$ は任意の長さの等差数列を含む．ここで，等差は一定でなくて良い．

証明. 彩色 C に対して次のように集合を定義する．

$$S = \{(l, n, w) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times [1, r] \mid C^{-1}(w) \cap [1, n] \text{ は長さ } l \text{ の等差数列を含む}\}$$

van der Waerden の定理より，任意の l について $(n, w) \in \mathbb{N}_+ \times [1, r]$ が存在して $(l, n, w) \in S$ である．特に S は無限集合である．また写像 $p: S \rightarrow \mathbb{N}_+; (l, n, w) \mapsto l$ は全射である．そして写像 $q: S \rightarrow [1, r]; (l, n, w) \mapsto w$ を考えると， S が無限集合であるこ

とと、 p が全射であることからある $w \in [1, r]$ について $p(q^{-1}(w))$ は無限集合である。また、 $(l, n, w) \in S$ ならば $m < l$ となる m について $(m, n, w) \in S$ なので、 $p(q^{-1}(w))$ が無限集合となる $w \in [1, r]$ について、 $C^{-1}(w)$ は任意の長さの等差数列を含む。 $\square$

2 Ramsey's Theorem

集合 S と基数 n について $[S]^n$ で S の濃度 n の部分集合全体を表すことにする。

基数 κ, n, c, λ について、任意の彩色 $\Gamma : [\kappa]^n \rightarrow c$ について、濃度 λ の κ の部分集合 M が存在して、 $\Gamma|_{[M]^n}$ が定数となるという命題を $\kappa \rightarrow (\lambda)_c^n$ で表すことにする。この文章では特に κ, λ が高々可算基数の場合を取り扱う。つまり古典的なラムゼーの定理である。

2.1 Infinite Ramsey Theorem

明らかに次がわかる。

補題 6. $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^1$

まず最初に n について帰納法を回せることを示す。

補題 7. $n \geq 2$ について $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ ならば $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^{n+1}$

証明. 今 $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ が正しいとする。

A を加算集合とする。 $\Gamma : [A]^{n+1} \rightarrow c$ を色付けとする。任意の x について、 $\Gamma_x : [A \setminus \{x\}]^n \rightarrow c$ を以下のように定義する。 $S \in [A]^n$ について

$$\Gamma_x(S) = \Gamma(S \cup \{x\})$$

帰納的に集合列 S_k と列 $\{x_k\}$ と関数列 $v_k : k \rightarrow c$ を構成していく。まず $S_0 = A$ とし、 x_0 は A の適当な元とする。 v_0 は空写像である。

一般に k まで S_k と x_k と v_k が定義されたときに S_{k+1} は $A \setminus \{x_k\}$ の部分集合で Γ_{x_k} について同色なものとする。 x_{k+1} は S_{k+1} の適当な元とし $v_{k+1}|_k = v_k$ と定義し、 $v_{k+1}(k)$ は S_{k+1} の色とする。

さて、 $v : \omega_0 \rightarrow c$ を $v(k) = v_{k+1}(k)$ と定義する。このとき v は $0, 1, \dots, c-1$ の値のうちどちらを無限回とる。(これは $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^1$ ということでもある。) 一般性を失うことなく 0 がそうであるとしてもよい。

$$B = \{x_k \mid v(k) = 0\}$$

と定義する． B は加算集合である．ここで， $k_0 < \dots, < k_n$ を任意にとる． S_m の定義から， $x_{k_1} \dots, x_{k_n} \in S_{k+1}$ であり， $v(k) = 0$ から

$$\Gamma_{x_{k_0}}(\{x_{k_1}, \dots, x_{k_n}\}) = \Gamma(\{x_{k_0}, \dots, x_{k_n}\}) = 0$$

$k_0, \dots, k_n$ は任意であったからつまり， Γ は $[B]^n$ は 0 の値しか取らない． $\square$

以上から次の定理がわかる．

定理 8 (Ramsey's Theorem). $n, c \in \mathbb{N}_+$ とすると $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ が成り立つ．

2.2 Finite Ramsey Theorem

任意の $n, c, a_0, \dots, a_{c-1} \in \mathbb{N}_+$ について次の言明を $\text{MRam}_c^n(a_0, \dots, a_{c-1})$ で表す．ある $r \in \mathbb{N}_+$ が存在して， $r \leq N$ となる任意の N と，任意の彩色 $\Gamma: [N]^n \rightarrow c$ に対してある $i \in c$ と $A \subset N$ が存在して $a_i \leq |A|$ かつ $\Gamma([A]^n) = i$ を満たす．

任意の $n, c, a \in \mathbb{N}_+$ について次の言明を $\text{Ram}_c^n(a)$ で表す．ある $r \in \mathbb{N}_+$ が存在して， $r \leq N$ となる任意の N と，任意の彩色 $\Gamma: [N]^n \rightarrow c$ に対して $A \subset N$ が存在して $a \leq |A|$ かつ $\Gamma([A]^n)$ は定数である．

定義から直ちに次のことがわかる．

補題 9.

$$\forall n \forall c \forall a_0 \dots \forall a_{c-1} (\text{Ram}_c^n(\max\{a_0, \dots, a_{c-1}\}) \implies \text{MRam}_c^n(a_0, \dots, a_{c-1}))$$

我々が示すべき命題は次である．

定理 10 (Finite Ramsey Theorem).

$$\forall n \forall c \forall a \text{ Ram}_c^n(a)$$

証明. $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ の成立と背理法で示す．

$$\exists n \exists c \exists a \neg \text{Ram}_c^n(a)$$

を仮定する．

ここで， $\neg \text{Ram}_c^n(a)$ とは次の言明のことである．任意の $r \in \mathbb{N}_+$ に対して，ある $r \leq N$ と彩色 $\Gamma: [N]^n \rightarrow c$ が存在して，どんな $a < |A|$ を満たす $A \subset N$ も $\Gamma([A]^n)$ は定数にならない．

よって、次のような短調増加列 $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と彩色 $\Gamma_i : [N]^n \rightarrow c$ が存在する．任意の i について、どんな $a < |A|$ を満たす $A \subset N_i$ も $\Gamma([A]^n)$ は定数にならない．

今全単射 $z : \mathbb{N} \rightarrow [\mathbb{N}]^n$ を考える． Γ_i たちのコドメインは有限集合なので次のような $\mathbb{N}$ の無限部分集合 $\{m(i, 0)\}_j$ が存在する．任意の i について $0 \in N_{m(i, 0)}$ であり、 $\Gamma_{m(i, 0)}(z(0))$ は同じ値．

帰納的に $\{m(i, k)\}$ が構成されたときにその可算部分集合 $\{m(i, k+1)\}$ を以下を満たすものとして定義する．任意の i について $k+1 \in m(i, k+1)$ であり、 $\Gamma_{m(i, k+1)}(z(k+1))$ は単色．

さて、 $\Gamma : [\mathbb{N}]^n \rightarrow c$ を以下のように定義する． $e \in [\mathbb{N}]^n$ について $\Gamma(e) = \Gamma_{m(z^{-1}(e), z^{-1}(e))}(e)$ と定義する．このとき $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ が成立するので、ある無限集合 $A \subset \mathbb{N}$ が存在して $\Gamma([A]^n)$ は単色となる．有限集合 $S \subset A$ を $|S| = a$ となるように適当に取る．そして、 $m(i, i)$ を $\max S < N_{m(i, i)}$ となるように取る． $m(i, j)$ の定義から、 $\Gamma|_{N_{m(i, i)}} = \Gamma_{m(i, i)}$ である．さて、 S はその定義の仕方から $\Gamma_{m(i, i)}([S]^n)$ が定数になり、 $S \subset N_{m(i, i)}$ となる．これは N_i の定義に反するので、背理法により定理が証明された． $\square$

3 Compactness Principle

上の方法と同じだが、このセクションでは Rado の選択原理を用いて無限ラムゼーの定理から有限ラムゼーの定理を証明する．また、無限 van der Waerden の定理から有限版を導く．

定理 11 (Rado's selection principle). 族 $\{A_i\}_{i \in I}$ を有限集合の族とする．また、 $\mathcal{P} \subset [I]^{<\omega}$ は任意の $J_1, J_2 \in \mathcal{P}$ に対してある $J_3 \in \mathcal{P}$ が存在して $J_1 \cup J_2 \subset J_3$ を満たすとする．各 $J \in \mathcal{P}$ について $f_J \in \prod_{i \in J} A_i$ が与えられているとする．このとき、 $F \in \prod_{i \in I} A_i$ が存在して、任意の $J \in \mathcal{P}$ に対して $K \in \mathcal{P}$ が存在して $J \subset K$ と $F|J = f_K|J$ を満たす．

証明. チコノフの定理から $\prod_{i \in I} A_i$ は離散空間の直積空間としてコンパクトである．各 $J \in \mathcal{P}$ について

$$E_J = \{g \in \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i \mid \exists K \in [I]^{<\omega} \ g|J = f_K|J\}$$

と定義する． E_J は非空である．これが閉集合であることを示そう． $g \notin E_J$ とする．このとき任意の $J \subset K$ について $g|J \neq f_K|J$ である．さて、 $O = \{h \in \prod_{i \in I} A_i \mid f|J = g|J\}$

とすると, J は有限集合なので O 開集合である. 定義から $O \cap E_J = \emptyset$ なので, E_J が閉集合であることがわかる. また, $J_1 \cup J_2 \subset J_3$ となる $\mathcal{P}$ の元の三つ組に対して $E_{J_3} \subset E_{J_1} \cap E_{J_2}$ なので, $\{E_J\}$ は有限交叉性を持ち, よってコンパクト性から $\bigcap_J E_J \neq \emptyset$ となる. $F \in \bigcap_J E_J$ を取れば, これは求める性質を持つ.

□

Proof finite Ramsey theorems from infinite Ramsey theorem. 背理法で示す.

$$\exists n \exists c \exists a \neg \text{Ram}_c^n(a)$$

を仮定する.

ここで, $\neg \text{Ram}_c^n(a)$ とは次の言明のことである. 任意の $r \in \mathbb{N}_+$ に対して, ある $r \leq N$ と彩色 $\Gamma : [N]^n \rightarrow c$ が存在して, どんな $a < |A|$ を満たす $A \subset N$ も $\Gamma([A]^n)$ は定数にならない.

よって, 次のような短調増加列 $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と彩色 $\Gamma_i : [N]^n \rightarrow c$ が存在する. 任意の i について, どんな $a \leq |A|$ を満たす $A \subset N_i$ も $\Gamma([A]^n)$ は定数にならない.

$I = \mathbb{N}$ とし, $A_i = c$ と定義し, $\mathcal{P} = \{[N_i]^n \mid i \in \mathbb{N}\}$ とする. このとき $f_{[N_i]^n} : [N_i]^n \rightarrow c$ を $f_{[N_i]^n}(e) = \Gamma_i(e)$ と定義する. すると Rado's selection principle から $\Gamma : \mathbb{N}^n \rightarrow c$ が存在し, 任意の N_i について, $N_k (i < k)$ が存在し $\Gamma|_{[N_i]^n} = \Gamma_k|_{[N_i]^n}$ が成り立つ. さて, $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0)_c^n$ が成り立つので, ある $S \subset \mathbb{N}$ が存在して $\Gamma([S]^n)$ は定数になる. S の部分集合 A を $a \leq |A|$ となるようにとる. 次に $\max A < N_i$ となる N_i をとる. すると, $\Gamma|_{[N_i]^n} = \Gamma_k|_{[N_i]^n}$ なので, $[N_k]^n$ の部分集合で, $\Gamma_k([A]^n)$ が定数で, $a \leq |A|$ となるものは存在しないはずなので, これは矛盾である. よって有限 Ramsey の定理が成り立つ.

□

Proof finite van der Waerden theorems from infinite one. 無限 van der Waerden の定理を仮定して有限のそれを証明する. 有限 van der Waerden の定理が成り立たないとする. つまり, ある $l, r \in \mathbb{N}_+$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対してある彩色 $C_n : [1, n] \rightarrow [1, r]$ が存在してどんな $w \in [1, r]$ についても $C_n^{-1}(w)$ が長さ l の等差数列を含まないとする. $I = \mathbb{N}_+$ とし $\mathcal{P} = \{[1, n] \mid n \in \mathbb{N}_+\} \subset [I]^{<\omega}$ とおく. また, $i \in I$ に対して $A_i = [1, r]$ とする. 各 $[1, n] \in \mathcal{P}$ について $f_{[1, n]} : [1, n] \rightarrow [1, r] = A_i$ を $f_{[1, n]} = C_n \in \prod_{i \in [1, n]} A_i$ と定義する. このとき Rado's selection principle より, ある $F \in \prod_{i \in I} A_i$ つまり, 写像 $F : \mathbb{N}_+ \rightarrow [1, r]$ が存在して任意の $[1, n] \in \mathcal{P}$ に対して $[1, k] \in \mathcal{P}$ が存在して $[1, n] \subset [1, k]$ と $F|_{[1, n]} = f_{[1, k]}|_{[1, n]} = C_k|_{[1, n]}$ が成り立つ. F は $\mathbb{N}_+$ の彩色なので, infinite van der Waerden の定理から, ある $w \in [1, r]$ が存在して

$F^{-1}(w)$ は任意の長さの等差数列を含む．特に長さ l の等差数列 $\{a_i\}_{i=1}^l$ を含む． N を $\{a_i\}_{i=1}^l \subset [1, N]$ となるように大きくとると， F の取り方から $N \leq K$ となる K が存在して $F|_{[1, K]} = C_K|_{[1, N]}$ となる．これは $C_K^{-1}(w)$ が長さ l の等差数列を含むということだから矛盾する．よって有限 van der Waerden の定理が成り立つ．

□

4 おまけ：帰納法による有限ラムゼーの定理の証明

定義 12. 任意の $n, c, a \in \mathbb{N}_+$ について， $R_c^n(a)$ で， $R_c^n(a) \rightarrow (a)_c^n$ を成り立たせる最小の正の自然数とする．もちろんまだ存在するかどうかは知らないとする．もし， $l \rightarrow (a)_c^n$ ならば， $R_c^n(a)$ は存在するし， $R_c^n(a) \leq l$ である．

鳩の巣原理から次がわかる．

定理 13. 任意の $n, c, a \in \mathbb{N}_+$ について $ac \rightarrow (a)_c^1$ つまり $R_c^1(a) \leq ac$ ．

補題 14. 当たり前だが， $R_c^n(a) \geq a$ である．

定理 15. 任意の $n, k, a \in \mathbb{N}_+$ について次がわかる．もし $R_k^n(a)$ が存在し，かつ $R_2^n(R_k^n(a))$ が存在するなら $R_{k+1}^n(a)$ も存在し， $R_{k+1}^n(a) \leq R_2^n(R_k^n(a))$ を満たす．

証明. $N \leq R_2^n(R_k^n(a))$ とし， $\Gamma : [N]^n \rightarrow k+1$ を彩色とする．そして $r \in k+1$ を適当にとり，新たに彩色 $\Delta : N \rightarrow 2$ を

$$\Delta(i) = \begin{cases} 0 & \Gamma(i) \neq r \\ 1 & \Gamma(i) = r \end{cases}$$

と定義する． $N \leq R_2^n(R_k^n(a))$ なので，ある N の部分集合 A で $\Delta([A]^n)$ が定数であって， $\text{card}(A) = R_k^n(a)$ となる．もし $\Delta([A]^n)$ の値が 1 ならば， $\Gamma([A]^n) = \{r\}$ で， $\text{card}(A) = R_k^n(a) \geq a$ なので，証明は終わる．もし $\Delta([A]^n) = 0$ ならば $\Gamma|_{[A]^n} : [A]^n \rightarrow k$ とみなせるので， $\text{card}(A) = R_k^n(a)$ からさらに A の部分集合 B で $\text{card}(B) \geq a$ であり， $\Gamma([B]^n)$ が定数であるものが存在する．これで証明が終わる． □

定理 16. もし n を任意に与える．もし任意の $x \in \mathbb{N}_+$ について $R_2^n(x)$ が存在するならば， $R_2^{n+1}(a)$ も存在し， $R_2^{n+1}(a) \leq (R_2^n)^{2a}(a) = R_2^n(R_2^n(\dots R_2^n(a)))$ を満たす．

証明. $(R_2^n)^{2a}(a) \leq N$ とする．帰納的に N_i で $N_i \subset N$ かつ $|N_i| \geq (2R_2^n)^{2a-i}(a)$ ， $x_i \in N_i$ と $v_i : i \rightarrow 2$ ($i \in 2a$) を構成していく．まず $N_0 = N$ とし， x_0 は N_0 の

適当な元とする．そして， v_0 は空写像である． N_i, e_i, v_i が構成された時に N_{i+1}, e_i, v_i を構成する． $|N_i| \geq (2R_2^n)^{2a-i}(a)$ なので， Γ_{x_i} をについて同色な部分集合 A で， $A \leq (R_2^n)^{2a-i-1}(a)$ となる A が存在する．これを N_{i+1} とし， $v_{i+1}(i+1)$ は $[N_{i+1}]^n$ の色とする．

さて， $v_{2a-1} : 2a \rightarrow 2$ はについて， $|S| = a$ で， $v_{2a-1}(S)$ が等色になるものが存在する ($2a \rightarrow (a)_2^1$ が成り立つということでもある)．その値は 0 としても一般性を失わない． $M = \{x_i \mid i \in A\}$ とする．もちろん $|M| = a$ である．任意に $k_0 < k_1 \dots k_n$ をとると， $x_{k_i} \in N_{k_0}$ である．また， $v_{2a-1}(k_0) = 0$ なので

$$\Gamma_{x_{k_0}}(\{x_{k_1}, \dots, x_{k_n}\}) = \Gamma(\{x_{k_0}, \dots, x_{k_n}\}) = 0$$

である． k_* は任意であったから， $\Gamma([M]^{n+1}) = 0$ であり，等色である． $\square$

定理 17. 任意の $n, c, a \in \mathbb{N}_+$ について $R_c^n(a)$ が存在する．つまり，任意の $n, c, a \in \mathbb{N}_+$ について十分大きい N が存在して

$$N \rightarrow (a)_c^n$$

を満たす．

証明. 上の命題を帰納法で回すとわかる． $\square$

参考文献

- [1] W. H. Gottschalk, *Choice functions and Tychonoff's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 172.
- [2] R. L. Graham and B. L. Rothchild, *A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 385–386.
- [3] R. Rado, *Axiomatic treatment of rank in infinite sets*, Canad. J. Math. 1 (1949), 337–343.