

Brown-Morse-Sard の定理について

電波通信

2022 年 3 月 26 日

1 準備

定義 1 (測度零). $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が測度零であるとは、任意の ε に対して n 次元区間の列 $\{I_i\}$ が存在して、 $S \subset \bigcup_i I_i$ と

$$\sum_i |I_i| < \varepsilon$$

を満たすときに言う。これは S のルベーグ測度が 0 であることと同値である。

定義 2 (臨界点とか). U は $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。そして写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^1 級とする。このとき各点 $p \in U$ に対して f のヤコビ行列 $Jf(p)$ が $m \times n$ 型行列として定義される。関数 f の臨界点とは $Jf(p)$ の階数が n より真に小さくなる点 p のことを言う。 C_f を f の臨界点全体の集合とする。また、 $f(C_f)$ に属する点を臨界値と言う。

$B_\delta^n(p)$ で中心を p とする半径 δ の $\mathbb{R}^n$ における開球を表すことにし、 $p = 0$ のときは単に B_δ^n と書くことにする。

2 Morse の補題

補題 3. U は $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。そして実数値関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級とし、 C^1 級写像 $\phi: B_\delta^n(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ は $\phi(B_\delta^n(p)) \subset U$ を満たすもので、 $b: (0, R) \rightarrow [0, \infty)$ は単調増加関数とする。さて固定された $y \in B_\delta^n(p)$ が任意の $x \in B_\delta^n(p)$ について $\|x - y\| < R$ を満たすとき常に

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(x)) \right| \leq b(\|x - y\|) \|x - y\|^{k-1}$$

を満たすならば、 f には依存しない $K > 0$ が存在して任意の $x \in B_\delta^n(p)$ に対して

$$|f(\phi(x)) - f(\phi(y))| \leq Kb(\|x - y\|) \|x - y\|^k$$

が成り立つ。

証明. $F(t) = f(\phi(y + t(x - y)))$ とすると $F(1) = f(\phi(x))$ かつ $F(0) = f(\phi(y))$ が成り立つ。さて $t \in (0, 1)$ が存在して

$$F(1) - F(0) = F^{(1)}(t)$$

を充たす。また

$$F^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(y + t(x - y))) \frac{\partial \phi^i}{\partial x_j}(y + t(x - y))(x_j - y_j)$$

であるので

$$|F^{(1)}(t)| \leq L \|x - y\| \left(\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(y + t(x - y))) \right| \right)$$

となる。さて仮定から

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(y + t(x - y))) \right| \leq b(\|y + t(x - y) - y\|) \|y + t(x - y) - y\|^{k-1}$$

が成り立ち、 $t \in (0, 1)$ なので

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(y + t(x - y))) \right| \leq b(\|x - y\|) \|x - y\|^{k-1}$$

となる。よって $K = mL$ と置けば

$$|f(\phi(x)) - f(\phi(y))| \leq Kb(\|x - y\|) \|x - y\|^k$$

となることがわかる。 □

定義 4 (C^k 級球形分解). A は $\mathbb{R}^m$ の部分集合、 P は $\mathbb{R}^m$ の開集合とし、 $A \subset P$ を充たすとする。 $A \subset \mathbb{R}^m$ と $k \geq 0$ に対して集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^m$ の部分集合族 $\mathcal{Y} \subset 2^{\mathbb{R}^m}$ と写像の族 $\Phi = \{\phi_Y : B_Y \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{Y \in \mathcal{Y}}$ の三つ組 $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ が (A, P) の C^k 級球形分解であるとは以下を充たすこととする。

- (1) X は可算集合
- (2) $\mathcal{Y}$ は可算族で、任意の $Y \in \mathcal{Y}$ は $Y \subset P$ を充たす。
- (3) ϕ_Y の定義域 B_Y は n_Y 次元ユークリッド空間の 0 を中心とした半径 δ_Y の開球である。
- (4) $A \subset X \cup \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$
- (5) ϕ_Y は B_Y から $\mathbb{R}^m$ の中への C^1 級の同相写像で $Y \subset \phi_Y(B_Y)$ を充たす。
- (6) $\forall x, y \in B_Y \quad \|x - y\| \leq \|\phi_Y(x) - \phi_Y(y)\|$
- (7) P 上で定義され、 A 上で 0 となる C^k 級の任意の実数値関数 f に対して、実数 $R_{Y,f} > 0$ と、 $(0, R_{Y,f})$ を定義域とする単調増加関数 $b_{Y,f}$ が存在して $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{Y,f}(\varepsilon) = 0$ を充たし、かつ、すべての $x \in B_Y$ と $\phi_Y(y) \in Y$ を充たす $y \in B_Y$ に対して、 $\|x - y\| < R_{Y,f}$ ならば

$$|f(\phi_Y(x))| \leq b_{Y,f}(\|x - y\|) \|x - y\|^k$$

が成り立つ。

また、組 (A, P) に C^k 級球形分解が存在するときに、 (A, P) は C^k 級球形分解可能であるという。

注意. $b_{Y,f}$ は連続でなくともよい。

いまから任意の m と任意の k 及び $A \subset P$ を充たす任意の $A \subset \mathbb{R}^m$ と任意の $\mathbb{R}^m$ の開集合 P について、任意の (A, P) は C^k 級モース球形分解可能であることを示す。

補題 5. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^m$ の部分集合族とし、 $\{P_i\}$ を $\mathbb{R}^m$ の開集合族とする。このとき各 (A_i, P_i) が C^k 級球形分解可能ならば、 $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i)$ もそうである。

証明. A_i の C^k 級球形分解を $(X_i, \mathcal{Y}_i, \Phi_i)$ とする。このとき

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_i, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i \right)$$

が $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i)$ の C^k 級球形分解になっている。このことは簡単に確かめられる。 $\square$

補題 6. $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ はユークリッド空間の開集合 D 上で定義された C^k 級写像で

$$\|x - y\| \leq \|F(x) - F(y)\|$$

を満たすとする。このとき、 $A \subset \mathbb{R}^m$ について $(F^{-1}(A), F^{-1}(P))$ が C^k 級球形分解 $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ を持つならば、 $(F(X), F_*(\mathcal{Y}), F \circ \Phi)$ は (A, P) の C^k 級球形分解になっている。ここで、

$$\begin{aligned} F_*(\mathcal{Y}) &= \{F(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\} \\ F \circ \Phi &= \{F \circ \phi_Y \mid Y \in \mathcal{Y}\} \end{aligned}$$

である。

証明. 一番最後の条件以外は容易に確かめられる。その最後の条件を調べよう。いま f は P 上の C^k 級関数で A 上で 0 になっているとする。このとき、 $f \circ F$ は $F^{-1}(A)$ 上で 0 になっている。よって $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{Y, f \circ F}(\varepsilon) = 0$ となる単調関数 $b_{Y, f \circ F}$ が存在してすべての $x \in B_Y$ と $\phi_Y(y) \in Y$ を満たす $y \in B_Y$ に対して

$$|f \circ F(\phi_Y(x))| \leq b_{Y, f \circ F}(\|x - y\|) \|x - y\|^k$$

が成り立つ。これを書き直すと、すべての $x \in B_Y$ と $F \circ \phi_Y(y) \in F(Y)$ を満たす $y \in B_Y$ に対して

$$|f(F \circ \phi_Y(x))| \leq b_{Y, f \circ F}(\|x - y\|) \|x - y\|^k$$

が成り立つことがわかるので、 $b_{F(Y), f} = b_{Y, f \circ F}$ とすれば、 $(F(X), F_*(\mathcal{Y}), F \circ \Phi)$ は最後の条件を満たし、これが (A, P) の C^k 級球形分解であることがわかる。 $\square$

補題 7. 任意の m について任意の (A, P) の C^0 級モース球形分解が存在する。

証明. ユークリッド空間の局所コンパクト性から直ちに補題は従う。 $\square$

補題 8. 任意の k について任意の $A \subset \mathbb{R}$ の C^k 級モース球形分解が存在する。

証明. 集合 X を A の孤立点全体とすると X はその相対位相において可分距離空間であり、また、離散空間でもあるので、 X は可算集合である。そして $\mathcal{Y} \subset 2^{\mathbb{R}}$ を、相対コンパクトな開区間の可算族で、 $A \setminus X$ を被覆し、その閉包が P の部分集合になっているものとする。 $A \setminus X$ はリンデレフで、 P は開集合なのでこのような集合族は存在する。次に各 $Y \in \mathcal{Y}$ について ϕ_Y を平行移動

$$\phi_Y : (-\text{diam}(Y)/2, \text{diam}(Y)/2) \rightarrow Y$$

として定義する。このような平行移動 ϕ_Y は Y について一意的に決まることと、平行移動なので、

$$|\phi_Y(x) - \phi_Y(y)| = |x - y|$$

となることに注意せよ。diam(Y) は Y の直径である。このように定義された $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ は分解の条件を満たすことがわかる。一番最後の条件を示そう。 f を A 上で 0 となる関数とする。このとき $A \setminus X$ の点はすべて A の集積点なので、任意の $x \in A \setminus X$ について

$$f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = \cdots = f^{(k)}(x) = 0$$

となることが帰納的に分かる。さて $x, y \in A$ と f にテイラーの定理を使うと

$$f(y) = f^{(k)}(\xi)(y-x)^k + f(x)$$

となる ξ が x と y の間に存在することがわかる。そして $Y \in \mathcal{Y}$ に対して、 $R_{Y,f}$ を

$$R_{Y,f} = \sup\{r > 0 \mid B(A \cap Y, r) \subset P\}$$

と定義し、 $b_{Y,f} : (0, R_{Y,f})$ を

$$(1) \quad b_{Y,f}(\varepsilon) = \sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x \in B(A \cap Y, \varepsilon)\}$$

と定義する。CL(Y) $\subset P$ に注意して、 $f^{(k)}$ がコンパクト集合上で一様連続であることを用いると

$$b_{Y,f}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

がわかる。そして (1) から $x, y \in Y$ について

$$|f(x) - f(y)| \leq b_{Y,f}(|x - y|)|x - y|^k$$

となることがわかる。このことと、 $|\phi_Y(x) - \phi_Y(y)| = |x - y|$ から、 $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ が (A, P) の C^k 級球形分解であることがわかる。□

補題 9. 任意に m を与え、 $A \subset \mathbb{R}^m$ で、 P は $\mathbb{R}^m$ の開集合で、 $A \subset P$ する。このとき k について任意の組 (A, P) の C^k 級モース球形分解が存在する。

証明. いまから $m + k$ に関する帰納法で証明を行う。 $m + k = 1$ の時は上の補題である。また、 $m > 1$ 、 $k > 0$ として証明しても一般性を失わない。いま $l + q < m + k$ となる組 (l, q) に対しては任意の部分集合 $B \subset \mathbb{R}^l$ と $B \subset Q$ となる組 (B, Q) の C^q 級モース球形分解が存在するしよう。

$A \subset \mathbb{R}^m$ を任意に与える。そして

$$\Theta = \{u \in C^k \mid u|_A = 0\}$$

$$S = \{x \in A \mid \forall u \in \Theta \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \partial_i u(x) = 0\}$$

$$T = A \setminus S$$

と定義しておく。帰納法の仮定から (S, P) に C^{k-1} 級モース球形分解 $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ が存在する。これが C^k 級球形分解にもなっていることを示そう。この b の条件を各 $\partial_j f$ に適応すると、各 $i \in \mathbb{N}$ ごとに $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{ij}(\varepsilon) = 0$ となる単調関数 b_{ij} が存在して各 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対してすべての $x \in B_{\varepsilon_i}^{n_i}$ と $\phi_i(y) \in E_i$ を満たす $y \in B_{\varepsilon_i}^{n_i}$ に対して

$$|\partial_j f(\phi_i(x))| \leq b_{ij}(\|x - y\|)\|x - y\|^{k-1}$$

となる。ここで

$$b_i(\varepsilon) = \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} b_{ij}(\varepsilon)$$

とすればすべての $x \in B_{\varepsilon_i}^{n_i}$ と $\phi_i(y) \in E_i$ を充たす $y \in B_{\varepsilon_i}^{n_i}$ および任意の $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して

$$|\partial_j f(\phi_i(x))| \leq b_i(\|x - y\|)\|x - y\|^{k-1}$$

が成り立つ。そして補題 3 から ϕ_i について $\phi_i(y) \in A_v^1$ ならば

$$|f(\phi_i(x))| \leq b_i(\|x - y\|)\|x - y\|^k$$

が成り立つ。つまり、 $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ は S の C^k 級モース球形分解になっている。

次に T について考察しよう。任意の $p \in T$ についてある関数 g で $g|_A = 0$ で $\partial_i g(p) \neq 0$ であるようなものが存在する。適当に番号を入れ替えて $\partial_m g(p) \neq 0$ としてよい。このとき陰関数定理から p の近傍 N_p と C^k 級写像 $h_p : B_{\delta_p}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して N_p の点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で

$$g((x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$$

を充たすものは $x_n = h_p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ と書ける。さらに

$$N_p \subset P$$

と仮定しても良い。ここで

$$H_p : B_{\delta}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, h_p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$$

を考えると、これは C^k 級で各 $x, y \in B_{\delta}^{m-1}$ について

$$\|x - y\| \leq \|H_p(x) - H_p(y)\|$$

であり、

$$N_p \cap A \subset H_p(B_{\delta}^{m-1})$$

を充たす。さて、もちろん $p \in N_p$ なので

$$T \subset \bigcup_{p \in T} N_p$$

であり、 T はリンデレフなので可算個の点 $\{p_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ が存在して

$$T \subset \bigcup_{v \in \mathbb{N}} N_{p_v}$$

となる。表記を簡潔にするために $N_v = N_{p_v}$ 、 $h_v = h_{p_v}$ 、 $H_v = H_{p_v}$ 、 $\delta_v = \delta_{p_v}$ と書くことにする。このとき各 $v \in \mathbb{N}$ について

$$N_v \cap A \subset H_v(B_{\delta}^{m-1})$$

が成り立つことに注意しよう。

ここで帰納法の仮定から $m-1$ と k に対する定理から $(H_v^{-1}(N_v \cap A), H_v^{-1}(P))$ は C^k 級球形分解 $(Z_v, \mathcal{W}_v, \Psi_v)$ が存在する。補題 6 から、 $(H_v(Z_v), (Z_v)_*(\mathcal{W}_v), H_v \circ \Psi_v)$ は $(N_v \cap A, P)$ の C^k 級球形分解になっている。さらに補題 5 から $(\bigcup_v (N_v \cap A), P)$ は C^k 級球形分解可能であり、さらに $T \subset \bigcup_v (N_v \cap A)$ なので T も C^k 級球形分解可能である。

以上のことから S と T に C^k 級球形分解が存在し、 $A = S \cup T$ なので補題 5 から (A, P) にも C^k 級球形分解が存在する。□

補題 10 (Morse の補題). $k \in \mathbb{N}$ とし A は $\mathbb{R}^m$ の部分集合で $P \subset \mathbb{R}^m$ は開集合とし、 $A \subset P$ とする。このとき $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して次を充たす。

- (1) $A \subset \bigcup_i A_i \subset P$
- (2) A_0 は高々可算集合。
- (3) $A \subset C_f$ となる任意の $f \in C^k(P)$ に対して非増加関数の列 $\{b_i : (0, R_{i,f}) \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して $b_i \rightarrow 0$ 及び任意の $x, y \in A_i$ ($i \geq 1$) について

$$|f(x) - f(y)| \leq b_i(\|x - y\|)\|x - y\|^k$$

が成り立つ。

この補題で述べられる $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を (A, P) の C^k 級モース分解と呼ぶことにする。

証明. $(X, \mathcal{Y}, \Phi)$ を先の補題から得られる (A, P) の C_k 級球形分割であるとする。 $A_0 = X$ として、 $\mathcal{Y}$ を適当に番号付して、 $\mathcal{Y} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ とし、またこの番号付に応じて、 $\phi_{A_i} = \phi_i$ 、 $B_{A_i} = B_i$ と書くことにする。条件の (1)、(2) はすぐにわかる。(3) を確かめよう。

各 $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して $\partial_r f|_A = 0$ なので、球形分解の定義の (7) から、各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $b_{i,r} : (0, R_{i,r}) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{i,r}(\varepsilon) = 0$ を充し、かつ、全ての $x \in B_i$ と $\phi_i(y) \in A_i$ を充す $y \in B_i$ に対して $\|x - y\| < R_{i,r}$ ならば

$$|\partial_r f(\phi_i(x))| \leq b_{i,r}(\|x - y\|)\|x - y\|^k$$

を充たす。さて、 $R_i = \min_r R_{i,r}$ と定め、

$$b_i := \max_r b_{r,i}$$

と定めれば、 $b_i : (0, R_i) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_i(\varepsilon) = 0$ を充し、かつ、全ての $x \in B_i$ と $\phi_i(y) \in A_i$ を充す $y \in B_i$ に対して $\|x - y\| < R_i$ ならば任意の $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ について

$$|\partial_r f(\phi_i(x))| \leq b_i(\|x - y\|)\|x - y\|^k$$

を充たす。

さて、 $x, y \in A_i$ に対して $\phi_r(s) = x, \phi_r(t) = y$ となる $s, t \in B_i$ を取る。これは $A_i \subset \phi_r(B_i)$ から可能である。さて、 b_i の性質と補題 3 から

$$|f(\phi_i(s)) - f(\phi_i(t))| \leq b_i(\|s - t\|)\|s - t\|^k$$

を得る。ところで

$$\|s - t\| \leq \|\phi_i(s) - \phi_i(t)\| = \|x - y\|$$

なので

$$|f(x) - f(y)| \leq b_i(\|x - y\|)\|x - y\|^k$$

がわかる。 □

次の定理がいわゆる Sad の定理である。

3 Brown-Morse-Sard の定理

定理 11 (Brown-Morse-Sard). $U \subset \mathbb{R}^m$ $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, f は C^r 級とする。もし

$$r \geq 1 + \max(m - n, 0)$$

ならば $f(C_f)$ は測度零である。

証明は場合分けで行う。

命題 12. $m < n$ の場合に定理 11 は成り立つ。つまり、 $m < n$ であり、 U が $\mathbb{R}^m$ の開集合で $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 級関数ならば $f(C_f)$ は測度零である。

証明. $O = U \times \mathbb{R}^{n-m}$ とし、 $F: O \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

と定義すると、 f が C^1 級関数であるから F もそうである。このことから F は局所リプシッツ関数であることがわかる。よって F は零集合を零集合に写す。 $C_f \times \{0\} \subset O$ は O の零集合であり、 $F(C_f \times \{0\}) = f(C_f)$ であるから定理は示された。□

命題 13. $m = n$ の場合に定理 11 は成り立つ。つまり、 $m = n$ であり、 U が $\mathbb{R}^m$ の開集合で $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が C^1 級ならば $f(C_f)$ は測度零である。

証明. U 中の有界閉立方体 A に対して $f(A \cap C_f)$ が零集合であることを示せばよい。まず、 f は A 上リプシッツであることに注意しよう。各 $a \in A$ に対して $T_a = (T_a^1, T_a^2, \dots, T_a^n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$T_a^i(x) = f_i(a) + \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(a)(x_j - a_j)$$

と定義する。すると

$$f_i(x) - T_a^i(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j f_i(x) - \partial_j f_i(a))(x_j - a_j)$$

$\partial_i f(x)$ は A 上一様連続なので $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $b(\varepsilon) \rightarrow 0$ となる b が存在して

$$\|f(x) - T_a(x)\| \leq b(\|x - a\|)\|x - a\|$$

となる。 $a \in C_f$ と仮定すると、この点では写像のランクが落ちてるので T_a によって A は $n - 1$ 次元部分空間 P_a に写像される。そして $\|x - a\| < \varepsilon$ とすると $\|f(x) - f(a)\| \leq L\varepsilon$ で P_a から $f(x)$ までの距離は $b(\varepsilon)\varepsilon$ より小さい。体積は高々 $2^n L^{n-1} \varepsilon^n b(\varepsilon)$ となる。

さて A を幅が $1/k$ となる k 個の立方体に分割する。臨界点 a を含む立方体は a を中心とする半径 $\sqrt{n}/k$ の球体の中に含まれる。この球体の像の体積は高々 $2^n L^{n-1} (\sqrt{n}/k)^n b(\sqrt{n}/k)$ である。立方体の個数は高々 k^n 個なので $f(A \cap C_f)$ の体積は高々

$$k^n 2^n L^{n-1} (\sqrt{n}/k)^n b(\sqrt{n}/k) = 2^n L^{n-1} n^{n/2} b(\sqrt{n}/k)$$

$k \rightarrow \infty$ とすると $f(A \cap C_f)$ の体積が 0 であることがわかる。□

$n < m$ の場合を証明するために補題をいくつか用意する。

補題 14. $U \subset \mathbb{R}^m$ は開集合とし、 $m > n$ とする。 $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^q 級とし S を f のランクが 0 になる点全体とする。このとき $q \geq m/n$ ならば $f(S)$ の測度はゼロである。

証明. $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を S の C^q 級モース分解とする。各 $g(S_i)$ が零集合であることを示せば良い。 $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ と成分表示する。このとき、 S は階数が 0 の点全体であることから、 $x \in S$ について x は各 g_i の臨界点になっている。モース分解の性質からある b_i が存在して $x, y \in S_i$ とすると $\|x - y\| < \varepsilon$ ならば任意の $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$|g_j(x) - g_j(y)| \leq b_i(\varepsilon)\varepsilon^q$$

となる。このことから、 $x, y \in S_i$ で $\|x - y\| < \varepsilon$ ならば

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sqrt{n}b_i(\varepsilon)\varepsilon^q$$

となる。 C を U に含まれる閉立方体として、 $g(S_i \cap C)$ が零集合であることを示せば良い。 C の一辺の長さを L とし、 C を一辺が L/k ($k \in \mathbb{N}$) の閉立方体 $\{C_l\}$ に分割すると、 C_l が半径 $\frac{L\sqrt{m}}{k}$ の球に含まれるので、 $f(S_i \cap C_l)$ は半径が

$$\sqrt{mn} \cdot b_i \left(\frac{L\sqrt{m}}{k} \right) \left(\frac{L\sqrt{m}}{k} \right)^q$$

の球に含まれる。 $\{C_l\}$ の個数は k^m 個なので、 $f(S_i \cap C)$ の測度は、球体の体積に関連した定数 K を用いて、上から

$$K \cdot b_i \left(\frac{\sqrt{m}}{k} \right) k^{m-qn}$$

と評価できる。この評価は任意の $k \in \mathbb{N}$ で成り立つので、 $k \rightarrow \infty$ とすると $f(S_i \cap C)$ の測度が零になることがわかる。□

補題 15. A を f の階数が r の点全体とする。このときもし $q \geq \frac{m-r}{n-r}$ ならば $f(A)$ は測度零である。

証明. $r = 0$ の時は先の補題である。 $p \in A$ とすると p の近傍 N とその局所座標系、 $f(p)$ 周りの局所座標系が存在して、

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

となるものが存在する。 $u_1, \dots, u_r$ を固定して写像

$$\eta : \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}; x = (u_{r+1}, \dots, u_m) \mapsto \eta(u) = (f_{r+1}(u, x), \dots, f_n(u, x))$$

を考えると階数は零である。 $P_{(u_1, \dots, u_r)}$ を最初の座標が $u_1, \dots, u_r$ であるような $\mathbb{R}^n$ の中の $n - r$ 部分空間とすると $r = 0$ の場合、つまり先の補題から $f(N \cap A) \cap P_{(u_1, \dots, u_r)}$ は $P_{(u_1, \dots, u_r)}$ の中で測度零である。よって $f(N \cap A)$ は任意の $P_{(u_1, \dots, u_r)}$ との交わりが零集合なのでフビニの定理から $f(N \cap A)$ も測度零である。□

命題 16. $n < m$ とする。 $U \subset \mathbb{R}^m$ $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, f は C^r 級とする。もし

$$r \geq m - n + 1$$

ならば $f(C_f)$ は測度零である。

証明. まず、各 i ($0 \leq i \leq n-1$) について

$$A_i = \{x \in U \mid \text{rank } Jf(x) = i\}$$

と定義する。もちろん

$$C_f = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

が成り立つ。そして $r \geq m-n+1$ のとき任意の $0 \leq i \leq n-1$ に対して $r \geq \frac{m-i}{n-i}$ なので先の補題から $f(A_i)$ が零集合であることがわかり、結局 $f(C_f)$ は零集合であることがわかる。□

命題 12、13、16 から定理 11 が成り立つ事がわかる。

4 Sard の補題にまつわる反例

Sard の定理に置いて、 r の微分可能性が $1 + \max(m-n, 0)$ より小さい場合何が怒るのか調べることは有意義である。今から以下の命題の異なる三つの証明を紹介して行く。

命題 17. C^1 級関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $f(C_f)$ が正測度を持つものが存在する。

4.1 Whitney による構成

次の形の Whitney の拡張定理を用いる。

命題 18. A を $\mathbb{R}^n$ の閉集合とし、 $n-1 < s < n$ とする。このとき任意の s -Hoelder 写像 f についてその拡張 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\sigma_k \leq n-1$ を充たす $k \in Z_n$ が存在して $x \in A$ について

$$\partial_k F(x) = 0$$

となる。

命題 19. C^1 級写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f(C_f)$ が正測度を持つものが存在する。

証明. 写像 $f_0, f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 3^{-1}x \\ f_1(x) &= 3^{-1}x + (2^{-1}, 1/6) \\ f_2(x) &= 3^{-1}x + (2^{-1}, 2^{-1}) \\ f_3(x) &= 3^{-1}x + (1/6, 2^{-1}) \end{aligned}$$

と定義する。 $f_i(Q) \subset Q$ を充すことに注意しよう。 $Q(n_1) = f_{n_1}(Q)$ ($n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$) と定め、一般に、 $Q(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が定義されたとき、 $Q(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) = f_{n_{k+1}}(Q(n_1, n_2, \dots, n_k))$ と定義する。そして

$$A_k = \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, k\}, n_i \in \{0, 1, 2, 3\}} Q(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

と定義し、

$$P = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

とする。 P はカントール集合と同相である。各 $x \in P$ に対して、 $x \in Q(a_1, a_2, \dots, a_k)$ かつ $x \in Q(b_1, b_2, \dots, b_l)$ で $k \leq l$ ならば、任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $a_i = b_i$ であるから、 x に対して無限列 $\{n_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ で

$$\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q(n_1(x), n_2(x), \dots, n_k(x))$$

となるものがただ一つ定まる。これを用いて、写像 $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k(x)}{4^k}$$

と定義する。さて、 $x, y \in P$ について、 k 番目で初めて $n_k(x) \neq n_k(y)$ となったとすると、

$$3^{-k} \leq \|x - y\|$$

となる。そして

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{3}{4^i} \leq \frac{1}{4^{k-1}}$$

となるので、 $s = \log 4 / \log 3$ として

$$|f(x) - f(y)| \leq 4^{-1} \|x - y\|^s$$

が成り立つ。また、任意の無限列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$) に対して $n_i(x) = n_i$ となる $x \in P$ が存在するので、 $f(P) = [0, 1]$ である。 $s > 1$ なので、この f に先の命題を適用し、任意の $k \in Z_2(1)$ と $x \in P$ に対して

$$\partial_k F(x) = 0$$

で $F|_P = f$ となる F を得ると、 $P \subset C_F$ なので、

$$[0, 1] \subset F(C_F)$$

となり、 F は C^1 級で $F(C_F)$ は正測度を持つ。 □

注意. 実際の *Whitney* の構成はカントール集合集合上ではなく $\mathbb{R}^2$ 内の弧に対して拡張定理を用いている。つまり *Whitney* は弧 γ 上でその勾配が 0 だが定数でない関数を構成した。この構成はカントールの悪魔の階段の二次元版とも思える。

注意. 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ ($m > n$) について C^{m-n} 級関数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ で、 $f(C_f)$ が正測度であるものの存在も示せる。

4.2 Grinberg による構成

次のよく知られた事実がある。証明は省略する。

命題 20. $C + C = [0, 2]$

Grinberg はこの命題 20 を用いて Sard の定理にまつわる反例を構成した。その第一段階は次に述べるような関数を構成することである。

命題 21. C^1 級の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で $C \subset f(C_f)$ となるものが存在する。

証明. カントール集合 C は単位区間を三等分し、その真ん中の開区間を取り除き、そしてまた残った区間をそれぞれ三等分し、そのそれぞれの真ん中の開区間を取り除き・・・とこの操作を繰り返して得られる集合である。 C の一次元ルベグ測度は 0 であることに注意しよう。 $\mathcal{I}$ を C を構成するときに取り除かれる開区間全体の集合とする。 $\mathcal{I}$ は開集合 $[0, 1] \setminus C$ の連結成分全体と一致する。 C が零集合であることから任意の $a \in C$ について

$$a = \sum_{I \in \mathcal{I}, I \subset [0, a]} |I|$$

が成り立つ。ここで $|I|$ は I の一次元ルベグ測度を表す。 $\sigma = 6/\pi^2$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{n^2} = 1$$

となる。ここで、この級数を元に通常のものとは異なるカントール集合を構成する。まず、単位区間の真ん中の点（つまり $1/2$ ）を中心とする長さが $\sigma/1^2$ の開区間（つまり $1/2$ を中心とする半径 $\sigma/2$ の開球と同じである）を取り除く。そして、次に残った二つの区間のそれぞれ真ん中の点を中心とする長さ $\frac{1}{2} \frac{\sigma}{2^2}$ の開区間を取り除く。この操作を繰り返してゆく。一般にこの操作を n 回行くと、 2^{n-1} 個の長さが同じ開区間が残る。 $n+1$ 回めの操作はこの残った 2^{n-1} 個の開区間の真ん中の点を中心とする長さ $\frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sigma}{n^2}$ の開区間を取り除く操作になる。この操作を繰り返して得られる集合を D とする。（正確には n 回目に残る集合を D_n としたとき、この D_n 全ての共通部分が D である。）さて、 n 回目の操作で取り除かれる開区間の長さの総和は $2^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sigma}{n^2}$ なので、全体として、取り除かれる開区間の長さの総和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sigma}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{n^2} = 1$$

となるから、 D は零集合である。 $\mathcal{J}$ を $[0, 1] \setminus D$ の連結成分全体、つまり D を定義するときに取り除かれた集合全体とする。 $\mathcal{J}$ は可算集合であるが、適当に番号をつけて $[0, 1] \setminus D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (p_k, q_k)$ とする。

連続関数 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で 任意の $t \in (0, 1)$ について $T(t) > 0$ 任意の $t \notin (0, 1)$ に対して $T(t) = 0$ そして $\int_{\mathbb{R}} T dt = 1$ を充すものを一つ取る。そして、各 k について $n(k)$ は、「 $n(k)$ 回目に (p_k, q_k) が取り除かれる。」を充すような自然数とする。（つまり $n(k)$ は (p_k, q_k) の世代数とする。）そして

$$h_k(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{n(k)^2 2^{n(k)-1}}{3^{n(k)}} T\left(\frac{x - p_k}{\frac{1}{2^{n(k)-1}} \frac{\sigma}{n(k)^2}}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{n(k)^2 2^{n(k)-1}}{3^{n(k)}} T\left(\frac{n(k)^2 2^{n(k)-1}}{\sigma} (x - p_k)\right)$$

と $h_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する。この h_k は

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(t) dt = \frac{1}{3^{n(k)}}$$

および

$$\text{supp}(h_k) = [p_k, q_k]$$

を充す。さてここで、 $h = \sum_k h_k$ と定義する。 h の連続性を調べよう。 $\{(p_k, q_k)\}$ は互いに交わらないので、連続性は D の点のみで調べれば良い。 T は $T(0) = T(1) = 0$ を充しているので、 $t \in D$ について $h(t) = 0$ である。そして、 $\frac{n^2 2^{n-1}}{3^n} \rightarrow 0$ なので h が連続であることがわかる。関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \int_0^x h(t) dt = \sum_k \int_0^x h_k(t) dt$$

と定義する。 h は連続なので f は C^1 級関数になる。

$\mathcal{A}_n$ を C を構成するときに現れる第 n 世代の閉区間全体とし、 $\mathcal{B}_n$ を D を定義するときに現れる第 n 世代の閉区間全体とする。また、 $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ 、 $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ とする。各 n について $\mathcal{A}_n$ は互いに交わらない 2^{n-1} 個の閉区間の族である。 $I, J \in \mathcal{A}_n$ について、任意の $x \in I$ と任意の $y \in J$ について $x < y$ となっているときに $I \prec J$ と定義する。 $\mathcal{B}_n$ にも同様に順序 $\prec$ を導入する。さて $\mathcal{A}_n$ 上でも $\mathcal{B}_n$ 上でも $\prec$ は全順序になっており、 $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{B}_n$ は濃度が同じ有限集合なので一意的に順序を保つ全単射 $s_n : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ が存在する。そして $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を $I \in \mathcal{A}$ が $A \in \mathcal{A}_n$ ならば $s(I) = s_n(I)$ として定義する。

各 $x \in C$ に対して、列 $\{I_k\} \subset \mathcal{A}$ で、 $I_k \in \mathcal{A}_k$ で

$$\bigcap_k I_k = \{x\}$$

を充すものが存在する。このような列は複数あることに注意せよ。そして

$$\bigcap_k s(I_k) = \{y\}$$

となる y が存在する。この y は列 $\{I_k\}$ の選び方に依らず一意的に存在するので、写像 $\alpha : C \rightarrow D$ をこの x に y を対応させる写像として定義する。

$\mathcal{I}_n$ を C を構成するときに取り除かれる第 n 世代の開区間全体とし、 $\mathcal{J}_n$ を D を定義するときに取り除かれる第 n 世代の開区間全体となる。もちろんこのとき $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ 、 $\mathcal{J} = \bigcup_n \mathcal{J}_n$ とする。上と同様にして $\mathcal{I}_n$ と $\mathcal{J}_n$ には全順序 $\prec$ が定義され、順序を保つ全単射 $r_n : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{J}_n$ が存在する。そして写像 $r : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ を $A \in \mathcal{I}$ が $\mathcal{I}_n$ ならば $r(A) = r_n(A)$ として定義する。このとき

$$r(\{I \in \mathcal{I} \mid I \subset [0, x]\}) = \{J \in \mathcal{J} \mid J \subset [0, \alpha(x)]\}$$

が成り立つ。

任意の $a \in C$ をとり $b = \alpha(a) \in D$ とする。このとき $f'(b) = h(b) = 0$ であり、

$$f(b) = \sum_k \int_0^b h_k(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}, (p_k, q_k) \subset [0, b]} \frac{1}{3^{n(k)}} = \sum_{I \in \mathcal{I}, I \subset [0, a]} |I| = a$$

であるので、 $C \subset f(C_f)$ を得る。(ちなみにこの構成だと $C = f(C_f)$ までわかる。) □

先に述べた命題を用いれば Sard の定理にまつわる反例が次のように構成できる。

命題 22. C^1 級関数 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ で $g(C_g)$ が正のルベーグ測度を持つものが存在する。

証明. 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を命題 21 で述べられた関数とする。そして関数 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x, y) = f(x) + f(y)$$

と定義する。すると g は C^1 級写像であり、また

$$J(g)(x, y) = 0 \iff (\partial_x f)(x) = 0, (\partial_y f)(y) = 0$$

が成り立つことがわかる。よって

$$[0, 2] = C + C \subset g(C_g)$$

であるから g が求める関数である。 □

4.3 Kaufman による構成

次の Whitney の補題を用いる。

命題 23. J を $\mathbb{R}$ の開区間とする。連続写像 $w : J \rightarrow \mathbb{R}$ と閉集合 $A \subset J$ 、 $v \in \mathbb{R}$ 、 $a \in J$ は以下を充たすとする。任意の ε に対して $\delta > 0$ が存在して

(1) $x \in A$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < \varepsilon$$

である。

(2) $x \in J \setminus A$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば導関数 $w'(x)$ が存在し、

$$|w'(x) - v| < \varepsilon$$

である。

このとき w は点 $a \in A$ において微分可能で $w'(a) = v$ である。

証明. 任意の $a \in A$ と任意の ε に対して $\delta > 0$ が存在して任意の $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < 2\varepsilon$$

を示せばよい。話を簡単にするために $a \leq x$ とする。 $x \in J \setminus A$ のときに目的の式を示せばよい。ここで p_x を $p_x \in A$ で、 $A \cap (p_x, x) = \emptyset$ となるものとする。 A が閉集合なのでこのような p_x は存在する。また、 $a \leq p_x$ である。(2) から w は開区間 (p_x, x) で微分可能なので中間値の定理から

$$w(x) = w(p_x) + w'(c)(x - p_x)$$

となる $c \in (p_x, x)$ が存在する。さてこのとき、

$$\begin{aligned} \frac{w(x) - w(a)}{x - a} &= \frac{w(x) - w(p_x)}{x - p_x} \frac{x - p_x}{x - a} + \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} \frac{p_x - a}{x - a} \\ &= w'(c) \frac{x - p_x}{x - a} + \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} \frac{p_x - a}{x - a} \end{aligned}$$

となり、また、

$$v = v \frac{x - p_x}{x - a} + v \frac{p_x - a}{x - a}$$

なので

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| \leq |w'(c) - v| \left| \frac{x - p_x}{x - a} \right| + \left| \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} - v \right| \left| \frac{p_x - a}{x - a} \right|$$

である。さて p_x 及び c の定義から $|c - a| < \delta$ 、 $|p_x - a| < \delta$ なので $|w'(c) - v| < \varepsilon$ かつ $\left| \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} - v \right| < \varepsilon$ である。また、 p_x の定義から $|x - p_x| \leq |x - a|$ かつ $|p_x - a| \leq |x - a|$ なので結局 $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < 2\varepsilon$$

を得る。 □

上の補題から次がわかる。

補題 24. $U \subset \mathbb{R}^m$ は開集合とし、孤立点を持たないコンパクト集合 $A \subset U$ は内点を持たないとする。連続関数 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ について、 F は $U \setminus A$ において C^1 級で任意の $a \in A$ に対して

$$\lim_{x \in U \setminus A, x \rightarrow a} JF(x) = 0$$

とし、さらに $a \in A$ について

$$\lim_{x \in A, x \rightarrow a} \frac{\|F(x) - F(a)\|}{\|x - a\|} = 0$$

が成り立っているとする。このとき F は U 上すべての点で C^1 級であり、 $JF(a) = 0$ である。

命題 25. C^1 級全射関数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で、各点 $x \in \mathbb{R}^3$ で $\text{rank}(f)(x) \leq 1$ となるものが存在する。

証明. $\beta < 1/2$ とする。 $I = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i - c_i| \leq L/2\}$ という立法体を考える。 $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i - (c_i + \varepsilon_i)L/4| \leq \beta L/2\}$ ($\varepsilon_i \in \{1, -1\}$) という形で書ける立法体を考える。 $(\varepsilon_i$ の値の選び方でこの形に書ける立方体は 8 個ある。) $= \mathcal{E}(I)$ この形に書ける立法体の間の距離は $L/2 - \beta L$ 以上である。また、 I の境界と先の形に書ける立方体との距離は $L/4 - \beta L/2$ 以上である。

今から $I = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$ で定義される立方体を 8 の小さい立方体に分割していったコントロール集合を作る。 $\mathcal{E}(I)$ を適当に番号付けて、 $\mathcal{E}(I) = \{I(n_1) \mid n_i \in \{1, 2, \dots, 8\}\}$ とする。一般に $I(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が定義されたとき、 $\mathcal{E}(I(n_1, n_2, \dots, n_k))$ を適当に番号付けて、

$$\mathcal{E}(I(n_1, n_2, \dots, n_k)) = \{I(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) \mid n_{k+1} \in \{1, 2, \dots, 8\}\}$$

として $I(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1})$ を帰納的に定義する。世代が同じ $I(a_1, a_2, \dots, a_k)$ と $I(b_1, b_2, \dots, b_k)$ との距離は $\beta^{k-1} - 2\beta^k$ 以上である。世代が異なる $I(a_1, a_2, \dots, a_k)$ と $I(b_1, b_2, \dots, b_j)$ ($k < j$) との関係は以下ようになる。もしこの二つが交わってなければ、この二つの立方体の間の距離は $\beta^{k-1}(1 - 2\beta)$ 以上になり、もし大きい方の立方体が小さい方を含んでいれば、大きい方の境界と、小さい立方体との距離は $\beta^k(1/2 - \beta)$ となる。

I の境界を B 、 $I(n_1, n_2, \dots, n_k)$ の境界を $B(n_1, n_2, \dots, n_k)$ で表すことにする。そして、

$$C(\beta) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, k\}, n_i \in \{1, 2, \dots, 8\}} I(n_1, n_2, \dots, n_k) \right)$$

とする。 $C(\beta)$ はコントロール集合と同相である。以下 $\beta^2 > 8^{-1}$ を仮定する。 R を $\mathbb{R}^2$ の任意の閉正方形とする。 $k \in \mathbb{N}$ と $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \{1, 2, \dots, 8\}$ に対して閉長方形 $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ を帰納的に以下のように定義する。 $R(n_1)$ は R を 7 つの垂直な線分によって 8 個の相似な長方形に分割し、それを番号付けたものとして定義する。一般に $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が定義された時、もし、 k が偶数ならば $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ を 7 つの垂直な線分で 8 個の相似な長方形に分割し、それを番号付けたものとして $R(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1})$ を定義し、もし k が奇数ならば $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ を 7 つの水平な線分で 8 個の相似な長方形に分割し、それを番号付けたものとして $R(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1})$ を定義する。ここで、ある $A > 0$ が存在して任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$\text{diam}(R(n_1, n_2, \dots, n_k)) \leq A2^{-3k/2}$$

となる。 $(k$ が奇数であるときと偶数であるときの場合分けすれば証明出来る。) 全射写像 $\Phi: C(\beta) \rightarrow R$ は $C(\beta) \cap I(n_1, n_2, \dots, n_k)$ を $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ に全射に写すとする。このような写像は存在する。以上の考察

から、 $M > 0$ が存在して $x, y \in C(\beta)$ について

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq M|x - y|^\lambda$$

となることがわかる。ここで $\lambda = -3 \log 2 / 2 \log \beta > 1$ である。

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(m/8) = a_m$ および、 C^1 級で

$$|f'| \leq 9 \max |a_m - a_{m+1}|$$

を充すものとする。 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ で ∂J_m の近傍上で $g = m/8$ となる C^1 級写像とする。この時 $g(\mathbb{R}^3) \subset [0, 1]$ であり、 $|Dg| \leq N\beta^{-k}$ を満たす。そして

$$F = f \circ g$$

と定義する。 F は $I \setminus C(\beta)$ 上で C^1 級である。境界上では $DF = 0$ であり、また、 $I(n_1, n_2, \dots, n_k) \setminus C(\beta)$ 上で

$$|DF| \leq |Dg||f'| \leq H\beta^{-k}2^{-3k/2} \leq H\beta^{-k}\beta^{\lambda k}$$

なので、先の補題から F は I 上全体で C^1 級であり、 $C(\beta)$ 上で $DF = 0$ である。 F の定義の仕方から F の階数は全ての点で 1 以下である。□

注意. この命題における各点 $x \in \mathbb{R}^3$ で $\text{rank}(f)(x) \leq 1$ という条件は $f(C_f)$ が正測度であるという条件よりも強いことに注意しよう。

5 多様体の間の写像の Brown-Morse-Sard の定理

定義 26. m 次元多様体 M の部分集合 S が測度零であるとは

定理 27 (多様体の Brown-Morse-Sard の定理). M, N をそれぞれ m, n 次元 C^r 級可微分多様体とし、 $f : M \rightarrow N$ は C^r 級とする。また、 M はリンデレフであるとする。このときもし

$$r \geq 1 + \max(m - n, 0)$$

ならば $f(C_f)$ は測度零である。

証明. ここまで読んだらわかる。□

参考文献

- [1] スタンバーグ著, 高橋恒郎訳「微分幾何学」吉岡書店, 数学業書 (24), 1985.
- [2] E. L. Grinberg, *On the smooth hypothesis in Sard's theorem*, Amer. Math. Monthly, vol. 47(1985), 299-304.
- [3] R. Kaufman, *A singular map of a cube onto a square*, J. Differential Geom. vol 14, No. 4(1979), 593-594.
- [4] A. Sard, *The measure of the critical values of differential maps*, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 48 (1942), 883-890

- [5] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Math. J. Vol. 1, No. 4(1935), 514-517.