

ホイットニーの拡張定理

電波通信

2024 年 2 月 22 日

この文章では Whitney の拡張定理を紹介する。この定理はユークリッド空間の閉集合の上で定義された (Whitney の意味での) 微分可能関数が実はユークリッド空間の通常の意味での微分可能関数の制限であるということを述べている定理である。Whitney の微分可能性はテイラーの定理をアナログして得られる自然な閉集合上の微分概念である。その意味で微分可能性を閉集合の上へ一般化しても、既存の範疇を超えていないことを教えてくれる定理である。この定理はしばしば有用な応用を与える。例えば Sard の定理の微分可能性の仮定を落とした場合の反例の構成に使える。応用はさておくとしてもこの定理は知っているだけでも大変ありがたいものであると私は考える。しかしながらこの定理の強力さに対してその証明が述べられているのは原論文だけであり、その論文は 1935 年に書かれたこともあって、現代的にはとても読みづらいものになってしまっている。そこでこの文章では原論文の証明をなぞりつつも、可能な限り読みやすい証明を提供する。その目的の一環がおまけの章にある微分のモデル代数である。この概念はこの文章だけのものなので他の場所で断りなく用いると恥ずかしい思いをするかもしれないが、それはさておき、微分のモデル代数は微分公式を可微分関数を用いて証明するのではなく抽象的な代数操作によって証明するために導入した。

1 Preliminaries

1.1 多重指数記法

この文章では

$$Z_n = \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$$

と定義する。各 $k \in Z_n$ に対して、その成分を $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ としたとき

$$\sigma_k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

と定義し、

$$\partial_k = \partial_{k_1} \partial_{k_2} \dots \partial_{k_n}$$

と定義する。この文章では偏微分の順序を気にしない関数しか出てこないなので、 ∂_k の定義に出てくる偏微分の順序は我々も気にしないことにする。また、

$$k! = k_1! k_2! \dots k_n!$$

と定義し、 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$x^k = x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_n}$$

と定義する。

$k, l \in Z_n$ に対して

$$k < l \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ k_i < l_i$$

と定め、

$$k \leq l \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ k_i \leq l_i$$

とする。 $k \leq l$ のとき、その二項係数を

$$\binom{k}{l} = \binom{k_1}{l_1} \binom{k_2}{l_2} \cdots \binom{k_n}{l_n}$$

と定義する。簡単にわかることだが、 $\binom{k}{l} \leq (\sigma_k!)^n$ となる。また、 $l \leq k$ のとき、

$$k - l = (k_1 - l_1, k_2 - l_2, \dots, k_n - l_n)$$

と定義する。このときちゃんと $k - l \in Z_n$ となる。

補助的に $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に対して

$$Z_n(m) = \{k \in Z_n \mid \sigma_k \leq m\}$$

と定義する。もちろん $Z_n(\infty) = Z_n$ である。多変数の場合のライプニッツ則は多重指数記号を用いると 1 変数の場合と同じように述べることができる。

補題 1. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。二つの C^m 級関数 $f, g, U \rightarrow \mathbb{R}$ と $k \in Z_n(m)$ について

$$\partial_k(fg) = \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} (\partial_{k-l} f) (\partial_l g)$$

が成り立つ。

1.2 その他基本的な定義

以下の補題は初等的に見えるが、拡張定理を証明する上で本質的である。

命題 2. J を $\mathbb{R}$ の開区間とする。連続写像 $w : J \rightarrow \mathbb{R}$ と J の閉集合 $A \subset J$ 、 $v \in \mathbb{R}$ 、 $a \in J$ は以下を充たすとする。任意の ε に対して $\delta > 0$ が存在して

(1) $x \in A$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < \varepsilon$$

である。

(2) $x \in J \setminus A$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば導関数 $w'(x)$ が存在し、

$$|w'(x) - v| < \varepsilon$$

である。

このとき w は A 上の任意の点 $a \in A$ において微分可能で $w'(a) = v$ である。

証明. 任意の $a \in A$ と任意の ε に対して $\delta > 0$ が存在して任意の $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < \varepsilon$$

を示せばよい。話を簡単にするために $a \leq x$ とする。 $x \in J \setminus A$ のときに目的の式を示せばよい。ここで p_x を $p_x \in A$ で、 $A \cap (p_x, x) = \emptyset$ となるものとする。 A が閉集合なのでこのような p_x は存在する。また、 $a \leq p_x$ である。(2) から w は开区間 (p_x, x) で微分可能なので中間値の定理から

$$w(x) = w(p_x) + w'(c)(x - p_x)$$

となる $c \in (p_x, x)$ が存在する。さてこのとき、

$$\begin{aligned} \frac{w(x) - w(a)}{x - a} &= \frac{w(x) - w(p_x)}{x - p_x} \frac{x - p_x}{x - a} + \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} \frac{p_x - a}{x - a} \\ &= w'(c) \frac{x - p_x}{x - a} + \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} \frac{p_x - a}{x - a} \end{aligned}$$

となり、また、

$$v = v \frac{x - p_x}{x - a} + v \frac{p_x - a}{x - a}$$

なので

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| \leq |w'(c) - v| \left| \frac{x - p_x}{x - a} \right| + \left| \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} - v \right| \left| \frac{p_x - a}{x - a} \right|$$

である。さて p_x 及び c の定義から $|c - a| < \delta$ 、 $|p_x - a| < \delta$ なので $|w'(c) - v| < \varepsilon$ かつ $\left| \frac{w(p_x) - w(a)}{p_x - a} - v \right| < \varepsilon$ である。また、 p_x の定義から $|x - p_x| \leq |x - a|$ かつ $|p_x - a| \leq |x - a|$ なので結局 $|x - a| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{w(x) - w(a)}{x - a} - v \right| < 2\varepsilon$$

を得る。 □

A を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。

定義 3. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とする。 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ が A 上 *Whitney* の意味で C^m 級であるとは A 上の関数列 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_n(m)}$ が存在して、 $f_0 = f$ であり、任意の $k \in \mathbb{Z}_n(m)$ と $x, y \in A$ について

$$R_k(x; y) = f_k(x) - \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{f_{k+l}(y)}{l!} (x - a)^l$$

で定義される $R_k(x; y)$ が次を充たすときにいう：任意に A の点 p と任意に ε を与えたときに $\delta > 0$ が存在して、 $\|x - p\| < \delta$ かつ $\|y - p\| < \delta$ ならば

$$|R_k(x; y)| \leq \|x - y\|^{m - \sigma_k} \varepsilon$$

を充たす。

このとき $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_n(m)}$ を、この文章では、*Whitney* 導関数と呼ぶことにする。

注意. 各 f_k は連続であることに注意しよう。 f_k の取り方は一意的でないことに注意しよう。

定義 4. 関数 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は *Whitney* の意味で C^m 級であり、 $\{f_k\}_{k \in Z_n(m)}$ はその *Whitney* 導関数とする。
このとき $k \in Z_n(m)$ と $y \in A$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\psi_k(x; y) = \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{f_{k+l}(y)}{l!} (x - y)^l$$

と定義する。

命題 5. $x, y \in A$ 、 $z \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき

$$\psi_k(z, y) = \psi_k(z, x) + \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{R_{k+l}(y; x)}{l!} (z - y)^l$$

が成り立つ。

証明. 多項式に関するテイラー展開から

$$\begin{aligned} \psi_k(z, x) &= \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{\psi_{k+l}(y, x)}{l!} (z - y)^l \\ &= \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{(z - y)^l}{l!} \sum_{\sigma_j \leq m - \sigma_{k+l}} \frac{f_{k+l+j}(x)}{j!} (y - x)^j \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\psi_k(z, y) = \psi_k(z, x) + \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{R_{k+l}(y; x)}{l!} (z - y)^l$$

が成り立つ。 □

補題 6. $R = (1 + \delta)Q$ とする。このとき任意の $y \in R$ に対して $x \in Q$ が存在して

$$d(y, x) \leq \delta \text{diam}(Q)$$

となる。

証明. Q の中心は 0 としてもよい。 $R = (1 + \delta)Q$ なので $y \in R$ に対して $y = (1 + \delta)x$ となる $x \in Q$ が存在する。このとき

$$d(y, x) = \delta|x| \leq \delta \text{diam}(Q)$$

である。 □

2 Whitney Decomposition

定義 7 (二進立方体). $\mathbb{R}^n$ の部分集合 Q は $Q = \prod_i^n [a_i, b_i]$ で、

$$a_i = m_i 2^{-l}, \quad b_i = (m_i + 1) 2^{-l}$$

$m_i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ と書けるものを二進立方体と呼び、 l を Q の世代と呼ぶことにする。世代が l の二進立方体全体を $\mathbf{D}_l$ で表すことにする。

命題 8. O を $\mathbb{R}^n$ の開集合とすると、次のような二進立方体の高々可算な列 $\{Q_i\}$ が存在する。

$$(1) i \neq j \implies Q_i \cap Q_j = \emptyset$$

(2)

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i = O$$

(3)

$$\sqrt{n}\ell(Q_i) \leq d(Q_i, O^c) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q_i)$$

(4) Q_i と Q_j が隣あっていれば、

$$4^{-1} \leq \frac{\ell(Q_i)}{\ell(Q_j)} \leq 4$$

(5) 各 Q_i は高々 12^n 個の $\{Q_i\}$ の元としかとなりあわない。

(6) $0 < u < 4^{-1}$ とする。各 i について R_i を Q_i と同じ中心を持ち、辺の長さが $(1+u)\ell(Q_i)$ となる閉立方体とする。すなわち、 $R_i = \text{CL}((1+u)Q_i)$ である。このとき R_i は高々 12^n 個のほかの $\{R_i\}$ の元としか交わらない。

$$(7) \frac{1-u}{1+u}\sqrt{n}\ell(R_i) \leq d(R_i, O^c) \leq \frac{4}{1+u}\sqrt{n}\ell(R_i)$$

証明. 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$O_k = \{x \in O \mid 2\sqrt{n}2^{-k} < d(x, O^c) \leq 4\sqrt{n}2^{-k}\}$$

と置く。すると

$$O = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} O_k$$

である。

$$\mathbf{E}_k = \{Q \in \mathbf{D}_k \mid Q \cap O_k \neq \emptyset\}$$

とし、次に

$$\mathbf{E} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_k$$

と定める。 $Q \in \mathbf{E}$ に対して (3) と同じことが成り立つ。つまり、

$$\sqrt{n}\ell(Q) \leq d(Q, O^c) \leq 4\sqrt{n}\ell(Q)$$

が成り立つ。まずはこのことを示そう。 $Q \in \mathbf{E}_k$ とする。まず、 $\text{diam}(Q) = \sqrt{n}\ell(Q) = \sqrt{n}2^{-k}$ に注意しよう。そして $x \in O_k \cap Q$ をとると

$$\sqrt{n}2^{-k} \leq d(x, O^c) - \text{diam}(Q) \leq d(Q, O^c) \leq d(x, O^c) \leq 4\sqrt{n}2^{-k}$$

なので上で今言ったことは成り立つ。

$\mathcal{S} = \{\mathbf{S} \mid \mathbf{S} \subset \mathbf{E}, \mathbf{S} \text{ は (1) を満たす.}\}$ を考える。列 $\{A_i\} \subset \mathbf{E}$ について、 $A_i \subsetneq A_{i+1}$ となるものは存在しないことに注意しよう。何故なら $Q \subset P$ ならば $d(Q, O^c) \geq d(P, O^c)$ なので (3) から

$$\ell(P) \leq 4\ell(Q)$$

がわかる。よって Q を含む $\mathbf{E}$ の元はたかだか有限個である。このことから、 $\mathcal{S}$ に包含関係を順序として Zorn の補題が適用できる。 $\mathcal{S}$ の極大元を $\mathbf{T} = \{Q_i\}$ としよう。これが条件を満たすことを示そう。

まず (1) については S の定義から明らかである。

(2) については $\mathbf{E}$ の定義と $\mathbf{T}$ の極大性から直ちに従う。

(3) は先ほど示した。

(4) を示そう。 Q_i と Q_j が隣り合っていれば $\text{CL}(Q_i) \cap \text{CL}(Q_j) \neq \emptyset$ に注意しよう。このとき、(3) から

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\ell(Q_i) &= \sqrt{n}\ell(\text{CL}(Q_i)) \leq d(\text{CL}(Q_i), O^c) \leq \text{diam}(\text{CL}(Q_j)) + d(\text{CL}(Q_j), O^c) \\ &\leq \sqrt{n}\ell(\text{CL}(Q_j)) + 4\sqrt{n}\ell(\text{CL}(Q_j)) = 5\sqrt{n}\ell(Q_j)\end{aligned}$$

となる。比 $\ell(Q_i)/\ell(Q_j)$ は 2 の整数べきのはずなので $\ell(Q_i)/\ell(Q_j) \leq 4$ である。これから (4) が従う。

(5) を示そう。 Q_i を一つ固定する。 $A = \{Q_k \in \mathbf{T} \mid Q_k \text{ は } Q_i \text{ と隣り合う}\}$ を考える。 $Q \in A$ について、

$$4^{-1}\ell(Q_i) \leq \ell(Q) \leq 4\ell(Q_i)$$

である。 $B = \{Q \in \mathbf{D} \mid \ell(Q) = 4^{-1}\ell(Q_i)\}$ とすれば、

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$$

である。また、 $C = \{Q \in \mathbf{D} \mid \ell(Q) = \ell(Q_i)\}$ とすると

$$\text{card}(B) = 4^n \text{card}(C)$$

であり、また、 $\text{card}(C) = 3^n - 1$ であるから (5) が従う。

(6) を示そう。 R_i の半径は $r(1+u)/2$ で、 $u \in (0, 4^{-1})$ なので、 R_i と R_j が交わるならば、 Q_i と Q_j は隣り合っている。

最後に (7) を示そう。 $Q_i \subset R_i$ なので

$$d(R_i, O^c) \leq d(Q_i, O^c) \leq \sqrt{n}\ell(Q_i)$$

である。補題 6 より $y \in R_i$ をとると $d(x, y) \leq u\text{diam}(Q_i)$ となる $x \in Q_i$ が存在するので

$$\sqrt{n}\ell(Q_i) \leq d(Q_i, O^c) \leq d(x, O^c) \leq d(x, y) + d(y, O^c) \leq u\text{diam}(Q_i) + d(R_i, O^c)$$

からわかる。 □

補題 9. 先の命題と同じ記号を用いる。このとき

$$2^{-1}\text{diam}(R_i) \leq d(R_i, O^c) \leq 4\text{diam}(R_i)$$

が成り立つ。

証明. $\varepsilon \in (0, 4^{-1})$ からわかる。 □

3 Whitney Partition of unity

この節では Whitney decomposition を用いて、微分の大きさも制御できるような単位の分割を構成することが目的である。

$\{Q_i\}$ を O の Whitney 分解であるとする。そして $Q = [-2^{-1}, 2^{-1}]^n$ 上で恒等的に 1 の値をとり、 $R = \text{CL}((1+u)Q)$ ($u \in (0, 4^{-1})$) の外では 0 の値をとるような C^∞ 関数

$$\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

を考える。 Q_i の中心を c_i として、

$$\tau_i = \psi \left(\frac{x - c_i}{\ell(Q_i)} \right)$$

と定義する。 $\text{supp}(\tau_i) \subset (1+u)Q_i$ なので $\{\psi_i\}$ は局所有限である。よって

$$T(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau_i(x)$$

と定義できる。そして

$$\phi_i(x) = \frac{\tau_i(x)}{T(x)}$$

と定義する。任意の $k \in Z_n$ に対して $N_k = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_k \tau(x)|$ とし、 $H_m = \max_{k \in Z_n(m)} N_k$ とする。

$\{Q_i\}$ は全て立方体であり、 Q_i と隣り合う $\{Q_i\}$ の元も Q_i の大きさに制御できることと、二進立方体 Q に隣接する、 Q と世代が高々二個しか違わない二進立方体の配置は有限個しかないので以下のことが成り立つ。

補題 10. ある $M > 1$ が存在して、任意の $x \in O$ に対して

$$\frac{1}{M} \leq T(x)$$

が成り立つ。

以下ではこの文章の一番最後の節に書いたおまけの節の結果を用いる。読むのが面倒な時は命題 13 を認めて次の説に進むのが良い。

おまけの節の結果に $d_i = \partial_i$ 、 $v_0 = T$ を代入した結果を用いる。命題 23 から次のことがわかる。

補題 11. M を先の補題にでてきたものとする。任意の $x \in R_i$ と任意の $k \in Z_n$ に対して

$$\left| \partial_k \left(\frac{1}{T} \right) (x) \right| \leq \left(M^{\sigma_k+1} (12^n 4 H_{\sigma_k})^{\sigma_k} \sum_{s \in J(\sigma_k)} \Gamma_s \right) \ell(Q_i)^{-\sigma_k}$$

証明. まず、 $|\partial_k \tau_i| \leq N_k \ell(Q_i)^{-\sigma_k}$ がわかる。そして命題 23 より

$$\left| \partial_k \left(\frac{1}{T} \right) \right| \leq \sum_{s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)} \Gamma_s |\Delta(s)|$$

がわかるが、 $I(\sigma_k+1, \sigma_k)$ の定義より、

$$\sum_{s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)} \Gamma_s |\Delta(s)| \leq M^{\sigma_k+1} \sum_{s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)} \Gamma_s |\Delta(s^*)|$$

となる。ここで、 s^* は $s^*(0) = 0$ で、 $k \in Z_n \setminus \{0\}$ については $s^*(k) = s(k)$ で定義される C_n の元である。 $s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)$ に対して $\text{supp}(s^*) = \{k(1), k(2), \dots, k(v)\}$ とすると

$$\Delta(s^*) = (\partial_{k(1)} T)^{s(k(1))} (\partial_{k(2)} T)^{s(k(2))} \dots (\partial_{k(v)} T)^{s(k(v))}$$

となる。さらに $T(x) = \sum_{i=1}^w \tau_{\lambda(i)}$ ($w \leq 12^n$) とすると

$$|\partial_l(T)(x)| \leq \sum_{i=1}^w |\partial_l \tau_{\lambda(i)}| \leq 12^n 4 N_l \ell(Q_i)^{-\sigma_l} \leq 12^n 4 H_l \ell(Q_i)^{-\sigma_l}$$

なので $s \in I(\sigma_k + 1, \sigma_k)$ について

$$|\Delta(s^*)| \leq (12^n 4H_{\sigma_k})^{(\sum_{i=1}^v s(k(i)))} \ell(Q_i)^{-\sum_{i=1}^v \sigma_{k(i)} s(i)} \leq (12^n 4H_{\sigma_k})^{\sigma_k} \ell(Q_i)^{-\sigma_k}$$

がわかる。これらのことから、補題が成り立つことがわかる。 $\square$

補題 12. 任意の k に対してある C_k が存在して、任意の $i \in \mathbb{N}$ について

$$|\partial_k \phi_i| \leq C_k \cdot \ell(Q_i)^{-\sigma_k}$$

証明. $\phi_i = \tau_i/T$ なので

$$\partial_k(\phi_i) = \partial_k\left(\frac{\tau_i}{T}\right) = \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} (\partial_{k-l} \tau_i) (\partial_l(T^{-1}))$$

となる。先の補題から

$$\begin{aligned} |\partial_k(\phi_i)| &\leq \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} |(\partial_{k-l} \tau_i)| |(\partial_l(T^{-1}))| \leq \\ &\sum_{l \leq k} \binom{k}{l} N_{k-l} \ell(Q_i)^{-\sigma_k + \sigma_l} \left(M^{\sigma_l+1} (12^n 4H_{\sigma_l})^{\sigma_l} \sum_{s \in I(\sigma_l+1, \sigma_l)} \Gamma_s \right) \ell(Q_i)^{-\sigma_l} \leq \\ &\left(M^{\sigma_k+1} (12^n 4H_{\sigma_k})^{\sigma_k} \sum_{s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)} \Gamma_s \right) \left(N_k \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} \right) \ell(Q_i)^{-\sigma_k} \end{aligned}$$

よって、

$$C_k = \left(M^{\sigma_k+1} (12^n 4H_{\sigma_k})^{\sigma_k} \sum_{s \in I(\sigma_k+1, \sigma_k)} \Gamma_s \right) \left(N_k \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} \right)$$

とおけば命題の主張は成り立つ。 $\square$

以上の議論をまとめると次のことがわかる。

命題 13. $\{\phi_i\}$ は先に定義された関数とする。このとき次のことが成り立つ。

(1) 任意の $i \in \mathbb{N}$ について $\text{supp}(\phi_i) \subset R_i$

(2)

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i = \chi_O$$

(3) 任意の $k \in Z_n$ に対してある C_k が存在して、任意の $i \in \mathbb{N}$ について

$$|\partial_k \phi_i| \leq C_k \cdot \ell(Q_i)^{-\sigma_k}$$

が成り立つ。

4 Whitney Extension

この節では Whitney の拡張定理を証明する。まず最初に微分可能性の仮定が有限な場合を証明する。

定理 14. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で、 A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合とし、 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を Whitney の意味で C^m 級とし、 $\{f_k\}_{k \in Z_n(m)}$ を、その Whitney 導関数とする。このとき C^m 級関数 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して任意の $a \in A$ と $k \in Z_n(m)$ に対して

$$\partial_k g(a) = f_k(a)$$

が成り立ち、 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 上で g は C^∞ 級となる。

証明. g を構成して、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $a \in A$ および任意の $k \in Z_n(m)$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、 $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ が $\|x - a\| < \delta$ を満たすならば

$$|\partial_k g(x) - f_k(a)| < \varepsilon$$

を示せばよい。何故ならば、 g を $\mathbb{R}^n$ の軸に平行な直線に制限して、命題 2 を用いれば、任意の $k \in Z_n(m)$ と $a \in A$ について $\partial_k g(a) = f_k(a)$ がわかるからである。

まず g を構成する。 $\{Q_i\}$ を $\mathbb{R}^n \setminus A$ の Whitney 分解とし、 $\{\phi_i\}$ をその Whitney の単位の分割とする。また、 $R_i = \text{CL}((1+u)Q_i)$ ($u \in (0, 4^{-1})$) とする。そして a_i を

$$d(A, R_i) = d(a_i, R_i)$$

となる $a_i \in A$ とする。これらを用いて

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(x) \psi(x; a_i) & x \in \mathbb{R} \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

と定義する。以下では、初めに述べた主張を示そう。 $l \in Z_n$ に対して C_l は命題 13 に現れる定数とする。さらに以下のように定数を定義する。

$$C = \max_{\sigma_l \leq m} C_l$$

$$E = \sup_{y \in B(a, 2) \cap A} \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k, l \neq 0} \frac{|f_{k+l}(y)|}{l!} < \infty$$

任意に $\varepsilon > 0$ を与える。そして η を

$$\eta = \frac{\varepsilon}{4 \cdot 12^n ((m+2)!)^n (20\sqrt{n})^m (C+1)}$$

とおき、 θ_1 を $\|y - a\| < \theta_1$ ならば、 t ($\sigma_t \leq m$) について

$$|R_t(y, a)| < \|y - a\|^{m - \sigma_t} \frac{\varepsilon}{2^m 6}$$

を満たすように取り、 θ_2 を、 $\theta_2 < 1$ で $\|y - a\|, \|z - a\| < \theta_2$ ならば任意の t ($\sigma_t \leq m$) について

$$|R_t(y; z)| \leq \|y - z\|^{m - \sigma_t} \eta$$

を充たすように取る。そして δ を

$$\delta = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{4}, \frac{\varepsilon}{18(E+1)}, \frac{1}{10} \right\}$$

と定義する。いまから $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ が $\|x - a\| < \delta$ を充たすならば

$$|\partial_k g(x) - f_k(a)| < \varepsilon$$

を示す。

$D = d(x, A)$ とし、 $b \in A$ を $D = d(x, b)$ でかつ $b \in B(x, 1)$ となるものとする。このような b は存在する。なぜなら $d(x, A) \leq d(x, a) < \delta < 1$ だからである。 $d(a, x) < \delta < 1$ より、 $a \in B(x, 1)$ でもあるので上のような b は $b \in B(a, 2)$ も充たす。

そして $\|x - b\| = d(x, A) \leq d(x, a)$ なので

$$d(b, a) \leq d(b, x) + d(x, a) \leq 2\delta$$

であるから、特に $d(b, a) < \theta_1$ となり、

$$\|R_k(y, a)\| < \|b - a\|^{m-\sigma_k} \frac{\varepsilon}{2^m 6} \leq (2\delta)^{m-\sigma_k} \frac{\varepsilon}{2^m 6} \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

がわかる。さて

$$\psi_k(b; a) = \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k} \frac{f_{k+l}(a)}{l!} (b - a)^l = f_k(a) + \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k, l \neq 0} \frac{f_{k+l}(a)}{l!} (b - a)^l$$

から

$$(1) \quad |\psi_k(b; a) - f_k(a)| \leq \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k, l \neq 0} \frac{|f_{k+l}(a)|}{l!} \|b - a\|^{\sigma_l}$$

がわかる。同様にして

$$(2) \quad |\psi_k(x; b) - f_k(b)| \leq \sum_{\sigma_l \leq m - \sigma_k, l \neq 0} \frac{|f_{k+l}(b)|}{l!} \|x - b\|^{\sigma_l}$$

がわかる。さて、 $2\delta < 1$ から $\|b - a\| < 1$ から $\|b - a\|^{\sigma_l} \leq \|b - a\|$ となる。よって、(1) と E の定義を思い出すと、

$$|\psi_k(b; a) - f_k(a)| \leq E \|b - a\| \leq 2E\delta < \varepsilon/6$$

となる。また、 $d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) \leq 3\delta < 1$ より、 $\|x - b\|^{\sigma_l} \leq \|x - b\|$ であり、 E の定義と $b \in B(a, 2)$ を思い出すと、(2) から

$$(3) \quad |\psi_k(x; b) - f_k(b)| \leq E \|x - b\| \leq 3E\delta < \varepsilon/6$$

を得る。

そして

$$(4) \quad |f_k(b) - f_k(a)| \leq |\psi_k(b, a) - f_k(a)| + |R_k(b; a)|$$

と以上の評価から結局

$$\begin{aligned} |\psi_k(x; b) - f_k(a)| &\leq |\psi_k(x; b) - f_k(b)| + |f_k(b) - f_k(a)| \\ &\leq |\psi_k(x; b) - f_k(b)| + |\psi_k(b, a) - f_k(a)| + |R_k(b; a)| < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

となるので、

$$(5) \quad |\psi_k(x; b) - f_k(a)| < \varepsilon/2$$

がわかる。

さて、 $x \in R_i$ となる i を、番号付けて $\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(s)$ ($s \leq 12^n$) とする。ここで、 $d(a_i, y_i) = d(a_i, R_i) = d(A, R_i)$ となる y_i をとる。すると

$$d(a, a_i) \leq d(x, a) + d(x, a_i) \leq d(a, x) + d(x, y_i) + d(y_i, a_i) \leq d(a, x) + \text{diam}(R_i) + d(A, R_i)$$

がわかる。ここで、 $\text{diam}(R_i) \leq 2d(A, R_i) \leq 2d(a, R_i) \leq 2d(a, x)$ かつ、 $d(A, R_i) \leq d(a, x)$ なので

$$d(a, a_i) \leq 4d(x, a) \leq 4\delta < \theta_2$$

で、また $d(a, b) < 2\delta < \theta_2$ なので結局、 $d(a_i, a) < \theta_2$ かつ $d(b, a) < \theta_2$ であるから任意の t ($\sigma_t \leq m$) について

$$(6) \quad |R_t(a_i; b)| \leq \|a_i - b\|^{m-\sigma_t} \eta$$

が成り立つ。

$\alpha_{i,k}(x) = \psi_k(x; a_i) - \psi_k(x; b)$ と置く。このとき命題 5 から

$$(7) \quad |\alpha_{i,k}(x)| \leq \sum_{\sigma_l \leq m-\sigma_k} \frac{|R_{k+l}(a_i; b)|}{l!} \|x - a_i\|^{\sigma_l}$$

となる。

$d(a_i, b) \leq d(x, a_i) + d(x, b) = d(x, a_i) + d(x, A) \leq 2d(x, a_i)$ に注意しよう。

$$g(x) = \psi(x; b) + \sum_{i=1}^s \phi_{\lambda(i)}(x) \alpha_{\lambda(i);0}(x)$$

を k 階微分すると

$$\partial_k g(x) = \psi_k(x; b) + \sum_{i=1}^s \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} \partial_l \phi_{\lambda(i)}(x) \alpha_{\lambda(i);k-l}(x)$$

を得る。 $\sum_{\sigma_l \leq m-\sigma_k} \frac{1}{l!} \leq (m+1)^n$ を踏まえて、

$$|\alpha_{i,k}(x)| \leq \sum_{\sigma_l \leq m-\sigma_k} \frac{|R_{k+l}(a_i; b)|}{l!} \|x - a_i\|^{\sigma_l} \leq \sum_{\sigma_l \leq m-\sigma_k} 2^{m-\sigma_{k+l}} \frac{1}{l!} \|x - a_i\|^{m-\sigma_k} \eta \leq 2^m (m+1)^n \|x - a_i\|^{m-\sigma_k} \eta$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} d(x, a_i) &\leq d(x, y_i) + d(y_i, a_i) \leq \text{diam}(R_i) + d(A, R_i) \leq \text{diam}(R_i) + 4\text{diam}(R_i) \\ &= 5\text{diam}(R_i) = 5(1+u)\text{diam}(Q_i) \leq 10\sqrt{n}\ell(Q_i) \end{aligned}$$

と

$$d(x, a_i) \leq d(x, a) + d(a, a_i) \leq 5d(x, a) < 5\delta < 2^{-1}$$

が成り立つことに注意しよう。 $s \leq 12^n$ であり、また $\binom{k}{l} \leq (m!)^n$ および $|\partial_l \phi_{\lambda(i)}(x)| \leq C_l \cdot \ell(Q_i)^{-\sigma_l}$ が成り立つことや、 $C = \max_{l \leq m} C_l$, $\sum_{l \leq k} 1 \leq (m+1)^n$ や、 $(m+1)^{2n}(m!)^n \leq ((m+2)!)^n$ とか Whitney の単位の分割の性質を踏まえると

$$\begin{aligned} |\partial_k g(x) - \psi_k(x; b)| &\leq \sum_{i=1}^s \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} |\partial_l \phi_{\lambda(i)}(x)| |\alpha_{\lambda(i); k-l}(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^s \sum_{l \leq k} \binom{k}{l} C_l \cdot \ell(Q_i)^{-\sigma_l} \cdot 2^m (m+1)^n \|x - a_i\|^{m-\sigma_k+\sigma_l} \eta \\ &\leq \sum_{i=1}^s \sum_{l \leq k} 2^m (m!)^n (m+1)^n (10\sqrt{n})^{\sigma_l} C \|x - a_i\|^{-\sigma_l} \cdot \|x - a_i\|^{m-\sigma_k+\sigma_l} \eta \\ &\leq 2^m (m+1)^n (m+1)^n (m!)^n C (10\sqrt{n})^m \sum_{i=1}^s \|x - a_i\|^{m-\sigma_k} \eta \\ &\leq 2^m 12^n ((m+2)!)^n (10\sqrt{n})^m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-\sigma_k} C \eta \\ &< 2^m 12^n ((m+2)!)^n (10\sqrt{n})^m C \eta \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

がわかる。この式と (5) から

$$|\partial_k g(x) - f_k(a)| < \varepsilon$$

がわかる。

□

定理 15. A を $\mathbb{R}^n$ の閉集合とし、 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を Whitney の意味で C^∞ 級とし、 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}_n}$ を f の Whitney 微分とする。このとき $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して任意の $a \in A$ と任意の $k \in \mathbb{Z}_n$ について

$$\partial_k g(a) = f_k(a)$$

が成り立つ。

証明. $p \in \mathbb{N}$ について

$$\psi_{p,k}(x; y) = \sum_{\sigma_l \leq p - \sigma_k} \frac{f_{k+l}(y)}{l!} (x - a)^l$$

と定義する。 $\{Q_i\}$ を $\mathbb{R}^n \setminus A$ の Whitney 分解とし、 $\{\phi_i\}$ をその Whitney の単位の分割とする。 $R_i = (1+u)Q_i$ ($u \in (0, 4^{-1})$) とする。適当に $o \in A$ を取り、 $S_p = B(o, 2^p)$ とする。そして各 $p \in \mathbb{N}$ について

$$L_p = \sup\{|f_k(x)| \mid x \in A \cap S_p\}$$

$$C^{(p)} = \max\{C_k \mid \sigma_k \leq p\}$$

と定義する。ここで C_k は命題 13 で述べられている定数である。そしてさらに $\{\delta_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ を

$$(1) \quad \delta_p < \frac{\delta_{p-1}}{4}$$

$$(2) \quad \delta_p < \frac{1}{2^p 12^n 3((p+2)!)^{n+1} (10\sqrt{n})^{p+1} C^{(p)} L_{p+1}}$$

の両方を充すような実数の列とする。

各 $i \in \mathbb{N}$ について

$$\delta_{\gamma(i)+1} \leq d(A, R_i) < \delta_{\gamma(i)}$$

となる風に $\gamma(i)$ を定める。そして a_i を

$$d(A, R_i) = d(a_i, R_i)$$

となる $a_i \in A$ とし、関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(x) \psi_{\gamma(i), 0}(x; a_i) & x \in \mathbb{R} \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

と定義する。

また補助的に各 $m \in \mathbb{N}$ について $g_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_m(x) = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(x) \psi_{\sigma_k, 0}(x; a_i) & x \in \mathbb{R} \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

と定義する。定理 14 の証明を見ればわかるように、このように構成された g は C^m 級関数で、任意の $a \in A$ と任意の $k \in Z_n(m)$ に対して、

$$\partial_k g_m(a) = f_k(a)$$

を充す。

定理を示すには、任意の $k \in Z_n$ と任意の ε と任意の $a \in A$ を与えたときに $\delta > 0$ が存在して $\|x - a\| < \delta$ ならば

$$|\partial_k h(x) - \partial_k g_{\sigma_k}(x)| < \varepsilon$$

となることを示せばよい。以下ではこれを示してゆく。自然数 $p \in \mathbb{N}$ を

$$(3) \quad p \geq \sigma_k$$

$$(4) \quad a \in S_p$$

$$(5) \quad 2^{-p} < \varepsilon$$

を充たすものとする。 δ を $\delta = 2^{-1} \min\{\delta_p, 5^{-1}\}$ と取る。 $\|x - a\| < \delta$ としよう。

q を

$$\delta_{q+1} \leq d(x, A) < \delta_q$$

となるようにとる。すると $\delta_{q+1} \leq \delta_p$ なので $q \geq p$ である。また、 $x \in R_i$ となる i について $\delta_{\gamma(i)} \leq \delta_p$ なので $\gamma(i) \geq p$ でもある。そして $d(y, A) = d(R_i, A)$ となる y をとれば

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \leq \text{diam}(R_i) + d(R_i, A) \leq 3d(A, R_i)$$

なので $\delta_{q+2} < \delta_{\gamma(i)}$ となり $\gamma(i) \leq q+1$ がわかる。

$$\beta_i(x) = \psi_{\gamma(i); 0}(x; a_i) - \psi_{\sigma_k; 0}(x; a_i)$$

とすれば

$$h(x) = g_{\sigma_k}(x) + \sum_{i=1}^s \phi_{\lambda(i)} \beta_{\lambda(i)}(x)$$

である。さて $\gamma(i) \geq p \geq \sigma_k$ に注意して

$$(6) \quad \partial_j \beta_i(x) = \sum_{\sigma_l = \sigma_k - \sigma_j + 1}^{\gamma(i) - \sigma_j} \frac{f_{j+l}(a_i)}{l!} (x - a_i)^l$$

を得る。 $d(x, a_i) \leq 5d(x, a) \leq 5\delta < 2^{-1} < 1$ および

$$d(x, a_i) \leq d(x, y_i) + d(y_i, a_i) \leq \text{diam}(R_i) + d(A, R_i) \leq 3d(A, R_i) \leq 3d(x, A) \leq 3\delta_q$$

から

$$(7) \quad |\partial_j \beta_i(x)| \leq 3(q+1)^n L_{q+1} \|x - a_i\|^{\sigma_k - \sigma_j} \delta_q$$

を得る。ここで、

$$\sum_{\sigma_l = \sigma_k - \sigma_j + 1}^{\gamma(i) - \sigma_j} 1 \leq \sum_{l_i \leq \gamma(i)} 1 \leq (\gamma(i))^n \leq (q+1)^n$$

を用いた。命題 13 を思い出すと、任意の $t \in Z_n$ について

$$|\partial_t \phi_i(x)| \leq C_t \ell(Q_i)^{-\sigma_t} \leq C_t (10\sqrt{n})^t \|x - a_i\|^{-\sigma_t}$$

となることがわかる。

以上のことから

$$\begin{aligned} |\partial_k h(x) - \partial_k g_{\sigma_k}(x)| &\leq \sum_{i=1}^s \sum_j \binom{k}{j} |\partial_{k-j} \phi_{\lambda(i)}(x)| |\partial_j \beta_{\lambda(i)}(x)| \\ &\leq 12^n (10\sqrt{n})^{\sigma_k} \sum_j \binom{k}{j} \|x - a_i\|^{-(\sigma_k - \sigma_j)} C^{(\sigma_k)} 3(q+1)^n L_{q+1} \|x - a_i\|^{\sigma_k - \sigma_j} \delta_q \\ &= 12^n (10\sqrt{n})^{q+1} (q+1)^n \sum_j \binom{k}{j} C^{(\sigma_k)} 3L_{q+1} \delta_q \end{aligned}$$

がわかる。ところで、 $\sigma_k < p \leq q$ なので

$$\sum_{j \leq k} \binom{k}{j} \leq \sum_{j \leq k} (\sigma_k!)^n \leq \sum_{j_i \leq \sigma_k} (\sigma_k!)^n \leq \sigma_k ((\sigma_k)!)^n \leq ((q+1)!)^{n+1}$$

が成り立ち、また、

$$(q+1)^n ((q+1)!)^n \leq ((q+2)!)^{n+1}$$

なので

$$|\partial_k h(x) - \partial_k g_{\sigma_k}(x)| \leq 3 \cdot 12^n ((q+2)!)^{n+1} (5\sqrt{n})^{q+1} C^{(q)} L_{q+1} \delta_q$$

を得る。また、 δ_q の定義から

$$3 \cdot 12^n ((q+2)!)^{n+1} (5\sqrt{n})^{q+1} C^{(q)} L_{q+1} \delta_q < 2^{-q} \leq 2^{-p} < \varepsilon$$

なので結局

$$(8) \quad |\partial_k h(x) - \partial_k g_{\sigma_k}(x)| < \varepsilon$$

がわかる。 □

以上の二つをまとめると以下ようになる。

定理 16. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ とし、また、 A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合とする。関数 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は *Whitney* の意味で C^m 級で、 $\{f_k\}_{k \in Z_n(m)}$ はその *Whitney* 導関数とする。このとき C^m 級関数 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して任意の $a \in A$ と任意の $k \in Z_n(m)$ について

$$\partial_k g(a) = f_k(a)$$

が成り立ち、 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 上で g は C^∞ 級となる。

この定理がいわゆる *Whitney* の拡張定理である。*Whitney* はより強く、 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 上で C^ω 級になるような拡張を構成しているが、使わないので細かいことは省略する。

5 応用: 1 より大きい指数でヘルダー連続になる関数

定義 17. 写像 $f : X \rightarrow Y$ が α -Hölder であるとはある M が存在して任意の $x, y \in X$ に対して

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq (d_X(x, y))^\alpha$$

を充すときにいう。

命題 18. A を $\mathbb{R}^n$ の閉集合とし、 $\alpha \geq 1$ として、さらに、写像 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は α -Hölder とする。そして、各 $k \in Z_n(\lfloor \alpha \rfloor)$ について、 A 上の関数族を、 $k \neq 0$ ならば $f_k(x) \equiv 0$ と定義し、 $f_0 = f$ と定義する。このとき、 $\{f_k\}_{k \in Z_n(\lfloor \alpha \rfloor)}$ は、 f の *Whitney* 導関数になり、 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は *Whitney* の意味で $C^{\lfloor \alpha \rfloor}$ 級関数になっている。

証明. 簡単に確かめられる。 □

このことと、*Whitney* の拡張定理から次のことがわかる。

命題 19. 閉集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された α -Hölder 写像に対して、 $\mathbb{R}^n$ 上の $C^{\lfloor \alpha \rfloor}$ 級関数 F で、任意の $k \in Z_n(\lfloor \alpha \rfloor)$ について、

$$\partial_k F = 0$$

となるものが存在して、

$$F|_A = f$$

を充す。

命題 20 (Sard の定理にまつわる例). 写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $f(C_f)$ が一次元ルベーグ測度で正になるものが存在する。

証明. 写像 $f_0, f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 3^{-1}x \\ f_1(x) &= 3^{-1}x + (2^{-1}, 1/6) \\ f_2(x) &= 3^{-1}x + (2^{-1}, 2^{-1}) \\ f_3(x) &= 3^{-1}x + (1/6, 2^{-1}) \end{aligned}$$

と定義する。 $f_i(Q) \subset Q$ を充すことに注意しよう。 $Q(n_1) = f_{n_1}(Q)$ ($n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$) と定め、一般に、 $Q(n_1, n_2, \dots, n_k)$ が定義されたとき、 $Q(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) = f_{n_{k+1}}(Q(n_1, n_2, \dots, n_k))$ と定義する。そして

$$A_k = \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, k\}, n_i \in \{0, 1, 2, 3\}} Q(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

と定義し、

$$P = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

とする。 P はカントール集合と同相である。各 $x \in P$ に対して、 $x \in Q(a_1, a_2, \dots, a_k)$ かつ $x \in Q(b_1, b_2, \dots, b_l)$ で $k \leq l$ ならば、任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $a_i = b_i$ であるから、 x に対して無限列 $\{n_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ で

$$\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q(n_1(x), n_2(x), \dots, n_k(x))$$

となるものがただ一つ定まる。これを用いて、写像 $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k(x)}{4^k}$$

と定義する。さて、 $x, y \in P$ について、 k 番目で初めて $n_k(x) \neq n_k(y)$ となったとすると、

$$3^{-k} \leq \|x - y\|$$

となる。そして

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{3}{4^i} \leq \frac{1}{4^{k-1}}$$

となるので、 $s = \log 4 / \log 3$ として

$$|f(x) - f(y)| \leq 4^{-1} \|x - y\|^s$$

が成り立つ。また、任意の無限列 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$) に対して $n_i(x) = n_i$ となる $x \in P$ が存在するので、 $f(P) = [0, 1]$ である。 $s > 1$ なので、この f に先の命題を適用し、任意の $k \in \mathbb{Z}_2(1)$ と $x \in P$ に対して

$$\partial_k F(x) = 0$$

で $F|P = f$ となる F を得ると、 $P \subset C_F$ なので、

$$[0, 1] \subset F(C_F)$$

となり、 F は C^1 級で $F(C_F)$ は正測度を持つ。 □

6 おまけ・微分公式と微分のモデル代数

この章では微分のモデル代数を導入し、ある特定の微分公式を証明する。これを導入する目的は文章の冒頭で述べたとおり、わかりやすさの担保であるが、もう一つの理由として微分公式に現れる係数が普遍的であることが簡単にわかるためである。例えば簡単な微分公式である

$$(f + g)' = f' + g'$$

についても、 f, g の選び方によっては $(f+g)' = 2f'$ であったり、 $(f+g)' = g$ であったりするわけである。こういう曖昧さを避けるために微分操作を抽象化して微分公式を証明したいと思った。しかしながら以下で述べる微分の代数化、抽象化はむしろ万人がある種の微分公式を証明する時に無意識にやっているのだと私は思う。微分可能関数 f を任意にとってもそれは「不定元」でしかないし、微分もライプニッツ則を充たす準同型でしかないわけである。だからと言って今から導入する概念が無駄かという、(全否定もできないけれど) そうではないと思う。人が無意識に行う推論、操作を発見し具象を与えることもまた数学の営みの一つだと思うからだ。

自然数 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $[i] \in Z_n$ をその第 j 成分が δ_{ji} となるものと定義する。すなわち、 $[i]$ は第 i 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるような Z_n の元である。

定義 21. $R_n = \mathbb{R}(\{v_k\}_{k \in Z_n})$ とする。即ち $k \in Z_n$ を添え字とする不定元 v_k 全体から生成される $\mathbb{R}$ 係数の有理式環のことである。また写像 $d_i : R_n \rightarrow R_n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を

$$d_i(1) = 0, \quad d_i(v_k) = v_{k+[i]}, \quad d_i(fg) = d_i(f)g + fd_i(g)$$

充たすものとして定義する。このような d_i は一意的に定まり、 $d_i d_j = d_j d_i$ を充たす。このとき、組 $(R_n, \{d_i\}_{i=1,2,\dots,n})$ を n 変数微分のモデル代数と呼ぶことにする。

$$C_n = \{s : Z_n \rightarrow \mathbb{Z}\}$$

$$F_n = \{s \in C_n \mid \text{card}(\text{supp}(s)) < \infty\}$$

各 $s \in F_n$ に対して単項式 $\Delta(s) \in R_n$ を

$$\Delta(s) = \prod_{k \in Z_n} (v_k)^{s(k)}$$

と定義する。

$$\text{supp}(s) = \{k \in Z_n \mid s(k) \neq 0\} = \{k(1), k(2), \dots, k(l)\}$$

と置けば、

$$\Delta(s) = (v_{k(1)})^{s(k(1))} (v_{k(2)})^{s(k(2))} \dots (v_{k(l)})^{s(k(l))}$$

と書くこともできる。 $a, b \in \mathbb{N}$ に対して F_n の部分集合を

$$I(a, b) = \left\{ s \in F_n \mid 1 \leq -s(0) \leq a, \quad k \neq 0 \implies s(k) \geq 0, \quad \sum_{k \neq 0} \sigma_k s(k) = b \right\}$$

と定義する。また、 $\{\Delta(s)\}_{s \in I(a,b)}$ から生成される $\mathbb{R}$ 線形空間を $S(a, b)$ と書くことにする。各不定元 v_k や不定元の冪らはもちろん線形独立なので、 $\{\Delta(s)\}_{s \in I(a,b)}$ から自由生成される $\mathbb{R}$ 線形空間と R_n の中で $\{\Delta(s)\}_{s \in I(a,b)}$ が張る $\mathbb{R}$ 線形空間は標準的に同型になる。 $s \in I(a, b)$ について $\Delta(s)$ はおよそ次のような形をしている。

$$\frac{(v_{k_1})^{s(k_1)} (v_{k_2})^{s(k_2)} \dots (v_{k_l})^{s(k_l)}}{v_0^{s(0)}}$$

補助的に

$$J(b) = \left\{ s \in F_n \mid s(0) = 0, \quad k \neq 0 \implies s(k) \geq 0, \quad \sum_{k \neq 0} \sigma_k s(k) = b \right\}$$

と定義しておく。 $I(a, b)$ と $J(b)$ は共に有限集合であることに注意しよう。

補題 22. $t \in I(a, b)$ とする。このとき任意の $i \in 1, 2, \dots, n$ について

$$d_i(\Delta(t)) \in S(a+1, b+1)$$

である即ち、 $I(a+1, b+1)$ で添え字つけられた、ある $\mathbb{R}$ の列 $\{P_s\}_{s \in I(a+1, b+1)}$ が存在して

$$d_i(\Delta(t)) = \sum_{s \in I(a+1, b+1)} P_s \cdot \Delta(s)$$

となる。さらに各 P_s は整数であり、一意的である。

証明. $\Delta(t)$ は次のように書ける

$$\Delta(t) = \frac{v_{k(1)} v_{k(2)} \cdots v_{k(l)}}{v_0^p}$$

ここで、 $k(1), k(2), \dots, k(l) \in Z_n$ は重複を許しており、 $\sum_{i=1}^l \sigma_{k_i} = b$ であり、 $1 \leq p \leq a$ である。さて、

$$\begin{aligned} d_i(\Delta(t)) &= d_i \left(\frac{v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l}}{v_0^p} \right) \\ &= \frac{d_i(v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l}) v_0^p - v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l} d_i(v_0^p)}{v_0^{2p}} \\ &= \frac{d_i(v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l}) v_0^p}{v_0^{2p}} - \frac{v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l} d_i(v_0^p)}{v_0^{2p}} \\ &= \frac{d_i(v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l})}{v_0^p} - p \frac{v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l} d_i(v_0)}{v_0^{p+1}} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\frac{d_i(v_{k_1} v_{k_2} \cdots v_{k_l})}{v_0^p} \in S(a+1, b+1)$$

であることとその係数が整数であることは簡単に分かるので、定理は成り立つ。 P_s の一意性は線形独立性から分かる。 $\square$

この補題を帰納的に用いることで次のことがわかる。

命題 23. $k \in Z_n$ は $\sigma_k = m$ を充たすとする。このとき有理式

$$(d_1)^{k_1} (d_2)^{k_2} \cdots (d_n)^{k_n} \left(\frac{1}{v_0} \right)$$

は $S(m+1, m)$ に属する。即ち、 $I(m+1, m)$ で添え字つけられた、 $\mathbb{R}$ の列 $\{\Gamma_s\}_{s \in I(m+1, m)}$ が存在して

$$(d_1)^{k_1} (d_2)^{k_2} \cdots (d_n)^{k_n} \left(\frac{1}{v_0} \right) = \sum_{s \in I(m+1, m)} \Gamma_s \cdot \Delta(s)$$

となる。さらに各 Γ_s は整数であり、一意的である。

参考文献

- [1] 薮田公三, 特異積分, 岩波数学業書, 2010.
- [2] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*, Springer, GTM249, 2014.

- [3] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke. Math. J., vol.4(1935), pp514–517.
- [4] H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc., vol.36, No.1(1934), pp63–89.