

# 有理数の順序型の特徴づけ

電波通信

2018 年 8 月 1 日

この文章では有理数の順序論的特徴づけを紹介する。すなわち次の定理を証明する。

**定理 1.** 最大値及び最小値を持たない可算で自己稠密な線形順序集合は互いに順序同型である。特に有理数と順序同型である。

まずは定義から始める。

**定義 2** (線形順序). 集合  $X$  上の二項関係  $\leq$  が線形順序であるとは

- (1)  $\forall a \in X \ a \leq a$
- (2)  $\forall a, b \in X \ a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$
- (3)  $\forall a, b, c \in X \ a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
- (4)  $\forall a, b \in X \ a \leq b \vee b \leq a$

を充たすことを言う。

$$a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$$

と定義する。

**定義 3** (自己稠密性). 線形順序集合  $(X, \leq)$  が自己稠密であるとは  $x < y$  となる任意の  $x, y \in X$  について

$$x < s < y$$

となる  $s \in X$  が存在することである。

集合  $X$  の上の順序を  $\leq_X$  と書いたりするが、文脈上明らかな場合は省略して  $\leq$  と書いてしまうことにする。定理 1 の証明のために以下の補題を用意する。

**補題 4.**  $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$  を最大値及び最小値を持たない可算で自己稠密な二つの線形順序集合とする。さらに  $S \subset X, T \subset Y$  はその有限部分集合とし、順序同型写像  $h: S \rightarrow T$  により  $S$  と  $T$  は順序同型であるとする。このとき任意の  $x \in X \setminus S$  について、ある  $y \in Y \setminus T$  が存在して  $h$  は順序同型写像

$$H: S \cup \{x\} \rightarrow T \cup \{y\}$$

へと拡張できる。

**証明.**  $S, T$  の元の番号付け  $S = \{s_i\}_{i=1}^n, T = \{t_j\}_{j=1}^n$  は以下の条件を充たすとしても一般性を失わない。

- (1)  $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$
- (2)  $h(s_i) = t_i$

そして三つに場合分けする。

場合分け (1) ( $\exists i \ s_i < x < s_{i+1}$  のとき。)

このときには  $Y$  の自己稠密性から  $t_i < y < t_{i+1}$  となる  $y$  が存在するので、これを用いて  $H(x) = y, H(s_i) = t_i$  と  $H$  を定義すれば、 $H$  は求めるものになっている。

場合分け (2) ( $s_n < x$  のとき。)

このときやはり  $Y$  の自己稠密性から  $t_n < y$  となる  $y \in Y$  が存在するので  $H(x) = y, H(s_i) = t_i$  と定義すればよい。<sup>\*1</sup>

場合分け (3) ( $x < s_1$  のとき。)

上と同様<sup>\*2</sup>。

以上で補題は証明された。 □

さて定理 1 の証明に入る。

定理 1 の証明. 所謂 back-and-forth argument により帰納法によって証明する。

$(A, \leq_A), (B, \leq_B)$  を最大値及び最小値を持たない可算で自己稠密な二つの順序集合とする。そして  $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}, B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  と番号付けされていると仮定する。この番号付けを用いて関数の拡張列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を以下の条件を満たすように帰納的に定義する。

- (1)  $f_n$  は順序を保つ全単射
- (2)  $\text{dom} f_n$  は有限集合で  $\{a_0, \dots, a_n\}$  を含む。
- (3)  $\text{cod} f_n$  は有限集合で  $\{b_0, \dots, b_n\}$  を含む。

Step0: ( $f_0$  を定義する)  $f_0$  は  $f_0 : \{a_0\} \rightarrow \{b_0\}$  で  $f_0(a_0) = b_0$  という写像として定義する。

Step1: ( $f_n$  が構成されたとして  $f_{n+1}$  を構成する) 補助的に  $g_n$  という順序同型写像を以下のように定義する。

もし  $a_{n+1} \in \text{dom}(f_n)$  ならば、 $g_n = f_n$  とし、 $a_{n+1} \notin \text{dom}(f_n)$  ならば  $f_n$  と  $a_{n+1}$ 、および  $\text{cod}(f_n), \text{dom}(f_n)$  に補題 4 を用いて  $f_n$  を  $\text{dom}(f_n) \cup \{a_{n+1}\}$  まで拡張した順序同型写像を  $g_n$  とする。

また更に補助的に  $h_n$  という順序同型写像を以下のように  $g_n^{-1}$  を拡張して定義する。

もし  $b_{n+1} \in \text{dom}(g_n^{-1}) = \text{cod}(g_n)$  ならば  $h_n = g_n^{-1}$  とする。もし  $b_{n+1} \notin \text{dom}(g_n^{-1}) = \text{cod}(g_n)$  の時には、 $g_n^{-1}, b_{n+1}$  に補題 4 を用いて  $g_n^{-1}$  を  $\text{dom}(g_n^{-1}) \cup \{b_{n+1}\}$  まで拡張した写像を  $h_n$  とする。

最後に  $f_{n+1} = h_n^{-1}$  と定義すれば帰納法の仮定をすべて満たす。

Step3: 以上で得られた順序同型写像の列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を用いて、写像  $F : A \rightarrow B$  を  $F(a_n) = f_n(a_n)$  と定義する。 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が写像の拡張列になっているので、この定義は well-defined である。

Step4: 写像  $F$  が順序同型写像になっていることを示す。まず最初に  $x, y \in A$  について

$$x < y \implies F(x) < F(y)$$

が成り立つことを示す。これが分かれば、単射性と順序保存性がわかる。十分大きい  $n$  を取れば  $x, y \in \text{cod}(f_n)$  となるものが見つかる。 $F$  の定義と  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が写像の拡張列であることから  $F(x) = f_n(x), F(y) = f_n(y)$  がわかる。さて  $f_n$  は順序同型であるから直ちに  $F(x) < F(y)$  を得る。

---

<sup>\*1</sup> ここで最大値を持たないという仮定を用いている。

<sup>\*2</sup> 最小値を持たないという仮定を用いる

最後に  $F$  が全射であることを示す。任意の  $y \in B$  に対して十分大きい  $n$  を取れば  $y \in \text{cod}(f_n)$  となる。写像  $f_n$  は順序同型なので、ある  $x \in \text{dom}(f_n)$  が存在して  $f_n(x) = y$  となる。つまり  $F(x) = y$  なので  $F$  は全射である。  $\square$

注意. 上の証明で  $g_n, h_n$  を構成する操作は  $A$  と  $B$  を往復（前後）している。これを指して *back-and-forth* と呼んでいると思われる。

例 5.  $\mathbb{R}$  の部分集合  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$  は  $\mathbb{Q}$  と順序同型である。

例 6. 集合  $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  は  $\mathbb{Q}$  と順序同型である。

例 7. 二進表示で有限小数で表すことのできる数全体、つまり

$$\left\{ \frac{m}{2^n} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

は  $\mathbb{Q}$  と順序同型である。