

Separated Set

一色三良 (conscious77)

2016 年 12 月 31 日

定義 1. 距離空間 (X, d) の部分集合 S が

$$\forall a, b \in S \ a \neq b \implies d(a, b) \geq \varepsilon$$

を満たすとき S を ε -separated set であるという。ただし $\varepsilon > 0$ とする。

命題 2. (X, d) の非空な部分集合 A と $\varepsilon > 0$ について、 A の部分集合でかつ ε -separated set になっているもので、包含関係について極大になるものが存在する。

証明.

$$\mathcal{M} = \{S \subset A \mid S \text{ は } \varepsilon\text{-separated set}\}$$

と置くと $\mathcal{M} \neq \emptyset$ でこれは包含関係で Zornian ordered set^{*1}になっているので Zorn の補題を適用すればよい。□

定理 3. 距離空間において $c.c.c.$ と可分性は同値である。

証明. 可分性から $c.c.c.$ が導かれるのは一般論である。逆を示そう。

任意の $n \in \mathbb{N}$ について A_n を (X, d) の極大な 2^{-n} -separated set としよう。このとき

$$\{B(a, 2^{-n-1}) \mid a \in A_n\}$$

は互いに交わらない開集合なので $c.c.c.$ から A_n は高々可算であることが分かる。 $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と定義すると Q は可算集合である。今任意に $x \in X$ を与えると、任意の $n \in \mathbb{N}$ について A_n の極大性から $d(x, a) < 2^{-n}$ となる $a \in A_n$ が存在する。このことから Q が X で稠密であることが分かるので (X, d) は可分である。□

^{*1} Zorn の補題の仮定を満たす順序集合のことを Zornian ordered set とここでは呼ぶことにする。