

LOTS の位相の基本

電波通信

2018 年 8 月 2 日

うろ覚えで書いたので標準的な用語と異なるかもしれません。

1 定義など

定義 1 (線形順序). 集合 X 上の二項関係 R が線形順序であるとは

- (1) $\forall a \in X \ aRa$
- (2) $\forall a, b \in X \ aRb \wedge bRa \implies a = b$
- (3) $\forall a, b, c \in X \ aRb \wedge bRc \implies aRc$
- (4) $\forall a, b \in X \ aRb \vee bRa$

を充たすことを言う。慣例に従い線形順序を $\leq$ などと書き表すことにする。また、

$$a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$$

と定義する。

定義 2 (部分線形順序集合). 線形順序集合 $(X, \leq)$ の部分集合 S について $\leq$ を S に制限した関係を $\leq$ の S のへの制限といい、 $\leq_S$ と書いてみたりするが、しばしば同じ記号 $\leq$ を流用してしまう。大体文脈で分かるので問題ないのだが、区別する必要がある場合もある。このとき $(S, \leq_S)$ を $(X, \leq)$ の部分線形順序集合という。

定義 3 (順序稠密性、順序の意味で稠密性). 線形順序集合 $(X, \leq)$ の部分集合 A が (順序の意味で) 稠密であるとは X の任意の二元 $a, b \in X$ について A の元 c が存在して

$$a < c < b$$

を充たすことを言う。これは順序位相における稠密性と同じことである。

定義 4. 線形順序集合 $(X, \leq)$ の元 a が S の上界であるとは

$$\forall x \in S \ x \leq a$$

を充たすときに言う。

線形順序集合 $(X, \leq)$ の元 b が S の下界であるとは

$$\forall x \in S \ b \leq x$$

を充たすときに言う。

定義 5 ($\sup, \inf, \max, \min$). 線形順序集合 $(X, \leq)$ の元 s が S の上界でありかつ

$$\forall y < s \exists x \in S y < x \leq s$$

を満たすとき s を S の上限といい $\sup S$ などと書き表す。特に $\sup S \in S$ のとき $\sup S$ は S の最大元といい $\max S$ などと表す。双対的に $\inf S$ が定義される。

$(X, \leq)$ の元 t が S の下限であるとは t は S の下界で

$$\forall y > t \exists x \in S t \leq x < y$$

が成り立つときに言い、 $\inf S$ などと書く。 $\inf S \in S$ のとき $\min S$ だとか書く。

上限と下限は常に存在するわけではないことに注意せよ。

注意. $\sup S$ は S の上界の最小値であり、 $\inf S$ は S の下界の最大限である。

定義 6 (順序完備性). 線形順序空間 $(X, \leq)$ が順序完備であるとは、 X の任意の非空な部分集合 S について $\inf S$ と $\sup S$ が存在するときに言う。

定義 7 (区間). 線形順序集合 $(X, \leq)$ と $a, b \in X$ について

- (1) $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$
- (2) $(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$
- (3) $[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$
- (4) $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$

と定義する。それぞれ开区間、半开区間、閉区間という。また

- (5) $(a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a < x\}$
- (6) $(\leftarrow, a) = \{x \in X \mid x < a\}$
- (7) $[a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a \leq x\}$
- (8) $(\leftarrow, a] = \{x \in X \mid x \leq a\}$

も無限开区間、無限閉区間などという。

注意. $b \leq a$ のとき、 $(a, b) = \emptyset$ に注意せよ。

定義 8. 線形順序集合 $(X, \leq)$ について $(X, \leq)$ の开区間及び無限开区間全体の族は開基の公理を満たす。この開基から生成される位相を $(X, \leq)$ の順序位相といい、ここでは $\mathfrak{O}_{\leq}$ と書くことにしよう。何らかの線形順序集合の順序位相と同相になっている位相空間を *LOTS* (*Linearly Ordered Topological Space*) (線形順序位相空間) という。

2 性質

命題 9. *LOTS* はハウスドルフ空間である。

証明. 線形順序位相空間 $(X, \leq)$ の二点 a, b を任意に与える。このとき $a < b$ としても一般性を失わない。

Case1: $(a, b) \neq \emptyset$ のとき; $c \in (a, b)$ をとると、 $a \in (\leftarrow, c)$, $b \in (c, \rightarrow)$ であるからわかる。

Case2: $(a, b) = \emptyset$ のとき; この状況のもと、 $(a, \rightarrow) = [b, \rightarrow)$, $(\leftarrow, b) = (\leftarrow, a]$ であるからわかる。 $\square$

注意. 実は一般に LOTS は単調正規という結構強めの分離公理を充たす。どのくらいの強さかという、単調正規ならば遺伝的族正規であるくらいの強さである。詳しくは

R.W.Heath, D.J.Lutzer and P.L.zenor, *Monotonically Normal spaces*, Trans.Amer.Math.Soc.178(1973), p481-493 を参照のこと

命題 10. $LOTS(X, \leq)$ の閉集合 A に下限が存在するならば、 $\inf A \in A$ 。上限についても同様。

証明. 下限の定義から、 $\inf A$ は A の触点になるのでわかる。□

定理 11. $(X, \leq)$ が順序完備であることと、 $(X, \mathfrak{O}_{\leq})$ がコンパクトであることは同値である。

証明. [順序完備 $\implies$ コンパクト]

$\mathcal{U}$ を X の任意の開被覆としよう。 X には最小値と最大値が存在するので $a = \min X$, $b = \max X$ しよう。そして

$$S = \{x \in X \mid [a, x] \text{ は } \mathcal{U} \text{ の有限部分族で被覆される} \}$$

とおく。 $a \in S$ なので $S \neq \emptyset$ である。また、 $x \in S \implies [a, x] \subset S$ にも注意しよう。 $s = \sup S$ と置く。まずは $s \in S$ を示そう。 $[a, s) \subset S$ となることはすぐにわかる。 $s \in U$ となる $U \in \mathcal{U}$ を一つとる。そして $A = [a, s] \setminus U$ は閉集合であるから $t = \sup A \in A$ で $s \notin A$ より $t < s$ が分かる。そして $t \in S$ なので $[a, t]$ は有限個の $\mathcal{U}$ の元 $V_1, V_2, \dots, V_n$ で被覆されるので結局 $[a, s]$ は $\mathcal{U}$ の有限個の元 $V_1, V_2, \dots, V_n, U$ で被覆されるから $s \in S$ となる。

今、 $[a, s]$ を被覆する $\mathcal{U}$ の有限個の元を $U_1, U_2, \dots, U_m$ とし、 $B = [s, b] \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$ と定義する。 B は閉集合で $s \notin B$ である。もし $B = \emptyset$ ならば $p = \inf B \in B$ が存在するから p を含む $\mathcal{U}$ の元 O を選べば $U_1, U_2, \dots, U_m, O$ は $[a, p]$ を被覆するので $p \in S$ だが他方 $s < p$ となるので $s = \sup S$ に反する。よって $B \neq \emptyset$ つまり $s = \max X$ なので X は $\mathcal{U}$ の有限個の元で被覆される。

[コンパクト $\implies$ 順序完備] S を X の非空な部分集合とする。このとき X の閉集合族

$$\{\text{CL}(S)\} \cup \{[a, \rightarrow) \mid a \in S\}$$

は X の有限交叉族であるので X のコンパクト性から

$$\text{CL}(S) \cap \bigcap_{a \in S} [a, \rightarrow) \neq \emptyset$$

となる。この集合から元 s をとると、 s は $\bigcap_{a \in S} [a, \rightarrow)$ の元であることから S の上界になり、 $\text{CL}(S)$ に属していることから任意の $y < s$ について

$$S \cap (y, \rightarrow) \neq \emptyset$$

だが、 s は S の上界なのでこれは

$$S \cap (y, s] \neq \emptyset$$

ということであり、これは $s = \sup S$ ということと同値である。よって $\sup S$ が存在する。 $\inf S$ が存在することも同様である。□

系 12. 順序数 α について $[0, \alpha] = \alpha + 1$ はコンパクトである。

3 部分集合について

$(X, \leq)$ の部分集合 S には、 $\leq_S$ から誘導される順序位相 $\mathfrak{A}(S)$ と、 $\text{LOTS}(X, \leq)$ の部分空間としての位相 $\mathfrak{B}(S)$ の二種類が考えられるが、一般にこの二つは一致しない。ただし、 $\mathfrak{B}$ の位相は $\mathfrak{A}$ より細かいことはよくわかる。つまり $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{B}(S)$ 。これは、 $\leq_S$ による開区間を $(a, b)_S$ と書き、 X における開区間を $(a, b)_X$ と書いたときに、 $a, b \in S$ について

$$(a, b)_S = (a, b)_X \cap S$$

が成り立つことからわかる。これら二つが一致する簡単な十分条件を二つ紹介しよう。

命題 13. S が X の稠密な部分集合のとき、 $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{B}(S)$

証明. 稠密性から任意の $a, b \in X$ について

$$(a, b)_X \cap S = \bigcup_{s, t \in (a, b)_X \cap S} (s, t)_S$$

となるのでわかる。 □

命題 14. S が X のコンパクト集合であるとき、 $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{B}(S)$

証明. $(S, \mathfrak{B}(S))$ がコンパクトで $(S, \mathfrak{A}(S))$ はハウスドルフでかつ $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{B}(S)$ から $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{B}(S)$ が分かる。 □

命題 15. S が X の区間であるとき、 $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{B}(S)$

証明. わかる。 □