

点可算被覆と可算コンパクト性

電波通信

2024 年 1 月 18 日

この文書では位相空間に如何なる分離公理も課さない。

定義 1 (星型集合). 集合 X とその部分集合族 $\mathcal{A}$ 、及び $x \in X$ について

$$\text{St}(x, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

を $\mathcal{A}$ による x を中心とする星型集合という。

定義 2 (完全集積点). 位相空間 X の部分集合 A について、 $x \in X$ が A の完全集積点であるとは、 x の任意の開近傍 U について

$$\text{card}(A) = \text{card}(U \cap A)$$

となること。

定理 3. 位相空間 X について以下は同値である。

- (1) X は可算コンパクト
- (2) X の可算部分集合 A に完全集積点が存在する。
- (3) X の無限部分集合 A について点 $a \in X$ が存在して a の任意の近傍 N について

$$\text{card}(A \cap N) \geq \aleph_0$$

を充たす。

証明. (2) と (3) が同値であることはよくわかる。(1) と (2) が同値であることを示そう。対偶を証明する。

$[\neg(2) \implies \neg(1)]$ の証明

$\neg(2)$ より、完全集積点を持たない可算無限集合 A が存在する。完全集積点を持たないので各点 $x \in X$ について x の近傍 U_x が存在して $\text{card}(U_x \cap A) < \aleph_0$ となる。さて A の有限部分集合 S について

$$O_S = \bigcup \{U_x \mid U_x \cap A = S\}$$

と定義しよう。 A の有限部分集合全体 $\mathcal{F}$ は可算集合であるから、 $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ は可算な族であり、 X の開被覆である。しかし構成の仕方からわかるように $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ の有限部分被覆 $\mathcal{U}$ の和集合 $\bigcup \mathcal{U}$ と A について $(\bigcup \mathcal{U}) \cap A$ は有限集合である。よって $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ 。つまり $\{O_S\}_{S \in \mathcal{F}}$ は有限部分被覆を持たない X の可算開被覆である。ゆえに X は可算コンパクトでない。

$[\neg(2) \implies \neg(1)]$ 終わり

$[\neg(1) \implies \neg(2)]$ の証明

X は可算コンパクトでないから有限部分被覆を持たない可算開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する。そこで $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を

$$a_n \notin \bigcup_{i=0}^n U_i$$

でかつ $n \neq m \implies a_n \neq a_m$ となるように選ぶ (これはちゃんと実行できる)。そして $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とすると A は可算無限集合である。これが完全集積点を持たないことを示そう。任意の $x \in X$ について $x \in U_m$ となる $\mathcal{U}$ の元をとると、構成の仕方から U_m は高々 $m+1$ 個の A の元としか交わらない。よって x は任意であったから A は完全集積点を持たない X の可算部分集合である。

$[\neg(1) \implies \neg(2) \text{ 終わり}] \quad \square$

定理 4. 可算コンパクト空間 X の点可算な開被覆 $\mathcal{U}$ は有限部分被覆を持つ。

証明. $\mathcal{U}$ を点可算な X の開被覆としよう。

$$\mathcal{M} = \{M \subset X \mid \forall a \in M \text{ St}(a, \mathcal{U}) \cap M = \{a\}\}$$

と定義する。このとき $\mathcal{M}$ は非空でかつ包含関係について Zornian ordered set^{*1}である。よって極大元が存在する。その一つを M としよう。 M は有限集合である。もしそうでないとしたならば、可算コンパクト性と定理 3 から $p \in X$ が存在し p の任意の近傍と M との共通部分が無限集合になるが、 $p \in U \in \mathcal{U}$ となる U を取ると、 M の取り方から U は M と高々一点でしか交わらないので矛盾する。

さて M の極大性から

$$X = \bigcup_{a \in M} \text{St}(a, \mathcal{U})$$

となる。つまり $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{U} \mid V \cap M \neq \emptyset\}$ は X の被覆である。さらに点可算性から $\mathcal{V}$ は高々可算であるので X の可算コンパクト性から $\mathcal{V}$ の有限部分被覆が存在するが、 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ であるからそれは $\mathcal{U}$ の有限部分被覆でもある。 $\square$

定義 5 (メタリンドレフ). 位相空間 X の任意の開被覆に点可算な開細分被覆が存在するとき、 X はメタリンドレフであるという。

系 6. メタリンドレフかつ可算コンパクトな空間はコンパクトである。

系 7 (Arens-Dugundji). メタコンパクトかつ可算コンパクトな空間はコンパクトである。

系 8. ω_1 はメタリンドレフではない。より詳しく、 ω_1 の有界開集合からなる開被覆は点可算な細分を持たない。

参考文献

[1] L.A.Steen and J.A.Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications Inc New York, 1995

^{*1} Zorn の補題の仮定を充たす順序集合のことを Zornian ordered set とここでは呼ぶことにする。