

ルベーク空間

一色三良 (conscious77)

2016 年 12 月 22 日

ルベーク空間の話

定義 1 (p 乗可積分). 測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の可測関数 f が $p \in [1, +\infty)$ 乗可積分であるとは

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

となることである。 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上 p 乗可積分関数全体を $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ と書き表すことにする。 X や $\mathfrak{M}, \mu$ などが何であるか明らかなきには単に $L^p(X)$ や L^p と書いたりもする。

注意. 1 乗可積分関数とは単に可積分関数のことである。

定義 2 (本質的有界). 測度空間 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上の可測関数 f が本質的有界とは

定義 3 (空間 L^∞). a

L^p を全部まとめてルベーク空間とか言ったりする。

定義 4 (ルベーク空間のノルム). a

補題 5. ヤングの不等式

命題 6. 三角不等式

定理 7. 完備性

定理 8. X が有界な場合のルベーク空間同士の関係

余談

後々、いつになるかはわからないが、リーマン積分からルベーク測度と呼ばれる測度を定義する。ルベーク測度は測度論の由来となった測度である。

ルベーク測度だとか測度論だとか名前のついた本を開くとルベーク測度の偉大さみたいなものが書かれていたりする。ルベーク測度は何やら”一般の図形”の”面積”が測れたりするのが大事なのでは無い。それでは何が重要なのかというと、収束定理を使って計算が楽になるというのも一つの考え方だが、上で述べられたルベーク空間が完備性を持つという事が重大度が高いと私は思想する。

未だ定義してないのだがルベーク測度に於いて L^p 空間を定義するにはルベーク測度自体は必要なくリーマン積分を用いて $C_c(\mathbb{R}^N)$ に L^p ノルムを定義して距離空間として完備化すれば（結果的には） L^p 空間が得られるのである。しかしそのように定義された L^p 空間は例えばコーシー列を同値類で割るなどの方法で完備化が得られてるとすると、空間の元は関数ですらなくなりとても扱いづらいものになっていしまう。そこに測度と

いう概念を一つ噛ませてやれば L^p 空間の元は関数であり、直感的にとてもわかりやすくなるのである。まるで一般の図形の面積が測れるから大事という風な口調で書かれた文書は嫌いである。

参考文献

[1]