

距離化可能性と閉像

一色三良 (conscious77)

2016 年 12 月 22 日

定義 1 (局所星型). 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ について、開被覆の列 $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathcal{U}$ に対して局所星型であるとは、各 $x \in X$ について x の近傍 V と $n \in \mathbb{N}$ 及び $U \in \mathcal{U}$ が存在して

$$\text{St}(V, \mathcal{A}_n) \subset U$$

となることである。

定理 2. 位相空間 X が *fully normal* であることと、 X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ についてそれに対して局所星型である開被覆の列が存在することは同値である。

証明. X が *fully normal* であるときに任意の開被覆に対してそれに対して局所星型であるような開被覆の列が存在するのは明らかである。($\mathcal{V}^* \prec \mathcal{U}$ となる $\mathcal{V}$ を取れば良い。) 逆を示そう。

$\mathcal{U}$ を任意に与え、 $\mathcal{U}$ に重心細分が存在することを示せば良い。 $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{U}$ に対して局所星型になる開被覆の列とする。さらに $\mathcal{U}_{n+1} \prec \mathcal{U}_n$ と仮定しても良い。そして

$$\mathcal{B} = \{V \mid V \text{ は } X \text{ の開集合でかつ、} \exists n \in \mathbb{N} (\exists U \in \mathcal{A}_n V \subset U) \text{ かつ } (\exists O \in \mathcal{U} \text{ St}(V, \mathcal{A}_n) \subset O)\}$$

と定義する。すると $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が局所星型であることから $\mathcal{B}$ は被覆となる。また $V \in \mathcal{B}$ について $n(V)$ を $n \in \mathbb{N} (\exists U \in \mathcal{A}_n V \subset U) \text{ かつ } (\exists O \in \mathcal{U} \text{ St}(V, \mathcal{A}_n) \subset O)$ を満たす n の最小値とする。そして $x \in X$

$$n(x) = \min\{n(V) \mid x \in V \in \mathcal{B}\}$$

と定義する。そして $P \in \mathcal{B}$ を $n(x) = n(P)$ となるものとする。 $x \in V \in \mathcal{B}$ とすると $n(x) \leq n(V)$ であり、 $V \in \mathcal{B}$ について $\exists U \in \mathcal{A}_{n(V)} V \subset U$ なので

$$\text{St}(x, \mathcal{B}) \subset \bigcup_{i \geq n(x)} \{\text{St}(x, \mathcal{A}_i)\}$$

そして $\mathcal{A}_{n+1} \prec \mathcal{A}_n$ なので

$$\text{St}(x, \mathcal{B}) \subset \text{St}(x, \mathcal{A}_{n(x)}) \subset \text{St}(x, \mathcal{A}_{n(P)}) \subset \text{St}(P, \mathcal{A}_{n(P)})$$

で $\mathcal{B}$ と $n(P)$ の定義からある $O \in \mathcal{U}$ が存在して $\text{St}(P, \mathcal{A}_{n(P)}) \subset O$ なので結局

$$\text{St}(x, \mathcal{B}) \subset O$$

なので $\mathcal{B}$ は $\mathcal{U}$ の重心細分となる。 □

定理 3. 以下は同値

1. X は距離化可能
2. X は T_0 空間で局所有限閉被覆の列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し、 $x \in X$ の任意の近傍 N を与えると $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{St}(x, \mathcal{F}_n) \subset N$ を満たす。
3. X は T_0 空間で開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在し、任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 N について x の近傍 M と $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\text{St}(M, \mathcal{U}_n) \subset N$ を満たす。
4. X は T_1 空間で任意の開被覆に対して局所星型となるような開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する。

定理 4. 距離空間の完全像は距離化可能空間である。

証明.

□

定理 5 (Hanai-Morita-Stone). 距離空間 X と全射閉写像 $f : X \rightarrow Y$ について以下は同値

- (1) Y は距離化可能
- (2) Y は第一可算公理を満たす。
- (3) 各 $y \in Y$ について $\text{Bdry}(f^{-1}(y))$ はコンパクト

参考文献

- [1] J.Dugundji, *Topology*, William C Brown Pub, 1966
- [2] K.Morita, *A condition for the metrizable of topological spaces and for n-dimensionality*, Science Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A, Vol 5, No.114(1955)
- [3] K.Morita and S.Hanai, *Closed mappings and metric spaces*, Proc.Japan Acad. vol 32.No.1(1956)
- [4] A.H.Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull,Amer.Math Soc. 54(1948),977-982
- [5] A.H.Stone, *Metrizability of decomposition spaces*, Proc. of Amer. Math. Soc., vol 54,No.4 (1956)
- [6] A.H.Stone, *Sequences of coverings*, Pacific J. Math. vol 10,No.2 (1960)
- [7] J.W.Tukey, *Convergence and uniformity in topology*, Annals of Mathematics Studies, no.2, Princeton, 1940

参考文献

- [1]