

単位閉区間が非空な可算個の閉集合の直和で書けないこと。

電波通信

2018 年 8 月 2 日

この文章では単位閉区間が非空な閉集合からなる可算族の直和で書けないことを証明する。このことは連続体、つまり、連結ハウスドルフ空間に対するシェルピンスキーの定理の特別な場合である。

定理 1. $I = [0, 1]$ は非空な開集合からなる可算族の直和で書けない。

証明. 背理法による。 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を非空な閉集合の可算族とし、更に互いに交わらないとして、 $I = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ となっているとする。ここで

$$O = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Int}(A_n)$$

とすると、これは開集合であり、 $\{A_n\}$ が互いに交わらないことから

$$F = I \setminus O = \coprod_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus \text{Int} A_n) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Bdry}(A_n)$$

は閉集合になる。ここで、

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ Int}_F(\text{Bdry} A_n) = \emptyset$$

をこれから示そう。ここで Int_F は F における内核を表す。このことを示すには、任意の $a \in \text{Bdry} A_n$ に対して

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} (j \neq n) \wedge ((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \text{Bdry} A_j \neq \emptyset)$$

を示せば良い。 a は A_n の境界点で、 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は互いに素な I の被覆を成しているので、

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} (j \neq n) \wedge ((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A_j \neq \emptyset)$$

が成り立つ。 $y \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A_j$ を取ろう。更に $y < a$ と仮定する^{*1}。 $y \in \text{Bdry} A_j$ ならば、何もすることはない。 $y \notin \text{Bdry} A_j$ 、つまり $y \in \text{Int} A_j$ としよう。このとき

$$[y, \delta) \subset A_j$$

を充たす δ 全体の $\sup$ を η としよう。つまり

$$\eta = \sup\{\delta \mid [y, \delta) \subset A_j\}$$

としよう。もちろん

$$[y, \eta) \subset A_j$$

^{*1} このように仮定しても一般性を失わないのは以下の証明を見ればわかる。

も成り立つ。 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は互いに素であり、 $y < a$ と仮定しているので

$$y < \eta < a$$

でなければならない。そして

$$a - \varepsilon < y < \eta < a$$

なので

$$\eta \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

である。また、 η の最大性から $\eta \in \text{Bdry} A_j$ なので、結局

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \text{Bdry} A_j \neq \emptyset$$

である。よって以上から $F = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Bdry}(A_n)$ において各 $\text{Bdry} A_n$ は内点を持たないことがわかった。しかし、これは Baire の範疇定理に反する。^{*2} □

上の定理から直ちに次のことが分かる。

系 2. 可算な T_1 空間は弧状連結ではない。

これに対して、連結ハウスドルフ可算空間は存在する。

^{*2} F は完備距離空間の閉集合なので完備距離空間であるから範疇定理が成り立つはずである。