

Noble's theorem

一色三良 (conscious77)

2018 年 8 月 1 日

この文章では Noble の定理と呼ばれるコンパクトハウスドルフ空間の一つの特徴づけを紹介する。事実ばかり出てくると思うが、カントール集合あたりの話以外はすべて電波通信の記事の中で参照できる。

事実 1 (tube lemma). $*^1X$ を位相空間、 Y の部分集合 A をコンパクトとする。更に $x \in X$ と $X \times Y$ の開集合 O が

$$\{x\} \times A \subset O$$

を満たしているとする。このとき X における x の開近傍 N と Y における A の近傍 M が存在して

$$\{x\} \times A \subset N \times M \subset O$$

を満たす。

定義 2. 連続関数 $f: X \rightarrow Y$ が次の条件 $(\star)$ を満たすとき f を完全写像と呼ぶ^{*2}

$(\star)$ 任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ は X のコンパクト集合かつ f は閉写像

次の事実の証明は簡単であると思う。

事実 3. コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について、 f は閉集合であり、かつ任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ はコンパクトである。つまり f は完全写像である。

次の命題は実は完全写像の特徴づけにもなっているのだが、この文章では以下に述べる程度のことしか使わない。

命題 4. X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を完全写像、 Z を位相空間とする。このとき、

$$1_Z \times f: Z \times X \rightarrow Z \times Y$$

は閉写像となる。^{*3}

証明. $A \subset Z \times X$ を閉写像とし、 $(a, b) \notin (1_Z \times f)(A)$ とする。このとき、

$$(1_Z \times f)^{-1}(a, b) = \{a\} \times (f^{-1}(b))$$

となり、更に明らかに

$$A \cap ((1_Z \times f)^{-1}(a, b)) = \emptyset$$

^{*1} 「tube lemma」参照

^{*2} 完全写像に全射性を仮定する流儀もある。

^{*3} 実際はより強く完全写像となる

となる。つまり

$$(1_Z \times f)^{-1}(a, b) \subset (Z \times X) \setminus A$$

である。 $(Z \times X) \setminus A$ が開集合であることから、Tube lemma より、 a の開近傍 N と $f^{-1}(b)$ の開近傍 M が存在して

$$(1_Z \times f)^{-1}(a, b) = \{a\} \times (f^{-1}(b)) \subset N \times M \subset (Z \times X) \setminus A$$

を充たす。ここで、 $V = f_!(M) = Y \setminus f(X \setminus M)$ と置くと、 f が閉写像であることと、 $f^{-1}(b) \subset M$ から、 V は M の開近傍である。^{*4}さて

$$y \in f_!(M) \iff f^{-1}(y) \subset M$$

が成り立つことなどから^{*5}

$$(N \times V) \cap ((1_Z \times f)(A)) = \emptyset$$

が分かる。 $N \times V$ は (a, b) の開近傍であることから、結局 $(1_Z \times f)(A)$ が閉集合であることが分かる。

よって $1_Z \times f$ は閉写像である。 □

定義 5. $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れて、直積空間 $D = 2^{\aleph_0}$ を考える。この空間をカントール空間と呼ぶ。この空間はミドルサードの議論で構成されるあのカントール集合と同相である。^{*6}

事実 6. D から単位区間 $I = [0, 1]$ への全射連続写像が存在する。^{*7}

事実 7. X をコンパクトハウスドルフ空間とし、その位相的重みが $w(X) \leq \mathfrak{m}$ とする。このとき X は $I^{\mathfrak{m}}$ に埋め込まれる。^{*8}

注意. $w(X)$ で位相空間の重みを表す。つまり位相空間 X の開基の最小濃度である。

定理 8. 位相空間 X と任意の無限基数 $\mathfrak{m}$ について以下は同値

- (1) $X \times 2^{\mathfrak{m}}$ は正規
- (2) $X \times D^{\mathfrak{m}}$ は正規
- (3) $X \times I^{\mathfrak{m}}$ は正規
- (4) $w(Y) \leq \mathfrak{m}$ となる任意のコンパクトハウスドルフ空間 K について $X \times K$ は正規

証明. $\aleph_0 \times \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ から $2^{\mathfrak{m}} \approx D^{\mathfrak{m}}$ となるので、(1) $\iff$ (2) はわかる。

(2) $\implies$ (3) は全射 $D \rightarrow I$ が存在することと、上の命題??から全射 $X \times D^{\mathfrak{m}} \rightarrow X \times I^{\mathfrak{m}}$ が閉写像となり、正規空間の開像が正規になることからわかる。

(3) $\implies$ (4) は $w(Y) \leq \mathfrak{m}$ となるコンパクトハウスドルフ空間は $I^{\mathfrak{m}}$ に埋め込めることと正規空間の開集合は正規であることからわかる。

(4) $\implies$ (1) は自明。 □

^{*4} 「閉写像云々」参照

^{*5} 「閉写像云々」参照

^{*6} このことを見るには、カントール集合の元が3進展開したときどのような形になるのかということを思い出せばよい。

^{*7} このことを見るには、2進展開を考えればよい。

^{*8} 「完全正則空間とか」参照

事実 9 (玉野の定理). ^{*9} $T_{3.5}$ 空間 X について以下は同値

- (5) X はパラコンパクト
- (6) 任意のコンパクトハウスドルフ空間 K について $X \times K$ は T_4

事実 10 (Stone). ^{*10}非空な T_1 位相空間の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に於いて $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が正規^{*11}なら Λ の高々可算な元を除いて X_λ は可算コンパクトである。

事実 11 (Arens-Dugundji). ^{*12}可算コンパクトかつメタコンパクトな空間はコンパクトである。

定理 12 (Noble). 位相空間 X は任意の基数 m について X^m が T_4 であるならば、 X はコンパクトハウスドルフである。

証明. X が空集合、または一点のみからなる空間のときは、定理の主張は自明であるので、以下 $\text{card}(X) \geq 2$ と仮定する。

さて、 $m = 1$ として X が T_4 であることが分かる。

$X^{\aleph_1}$ も T_4 なので上の事実??から X は可算コンパクトであることが分かる。

$X \times X^m$ も T_4 なので、これの閉部分空間である $X \times 2^m$ も T_4 であるから m の任意性と事実??、定理??と事実??から X はパラコンパクトであることが分かる。そして事実から X はコンパクトであることが分かる。^{*13} □

参考文献

[1] 児玉之行, 永見啓応, 位相空間論, 岩波書店, 1974

^{*9} 「パラコンパクト性など: アドベントカレンダー 2015」参照

^{*10} 「非可算個の可算離散空間の直積について」参照

^{*11} このとき自動的に T_4 にもなる。

^{*12} 「可算コンパクトとメタコンパクト」参照

^{*13} X はパラコンパクトなので特にメタコンパクトである。ところで事実??の証明の仮定をメタコンパクトの代わりにパラコンパクトハウスドルフにまで強めると事実??の証明はより簡単になる。