

$\mathbb{R}^n$  内の星型領域は、

$\mathbb{R}^n$  に微分同相

一色 三良

(Isiki SanRah)

@ConCious??

この文書では、星型領域

が、 $\mathbb{R}^n$  に diffeo であること

を証明する。

この定理は Bock-Tu による

Good cover の存在証明に

使用されるはずである。

Def 1 (下半連続関数)

$$f: (X, d) \rightarrow [-\infty, +\infty)$$

が下半連続関数であるとは、

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x) \quad f(y) > f(x) - \varepsilon$$

が成立する。と定義する。

これは、 $\forall a \in \mathbb{R}$  に対して、

$$f^{-1}((a, \infty)) \text{ が open であること、}$$

も示す。

$$f^{-1}([-\infty, a]) \text{ が closed}$$

であることを示す。同値である。

Prop 2.  $S > 0$  is a real number,

$f: X \rightarrow [-\infty, \infty)$  is lower semicontinuous, i.e.,

$\forall x \in X, f(x) \geq S > 0$  can

be established (2.3.2). 2.3.2, 2.3.2, 2.3.2,

continuous function sequence  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

can exist (2.3.2).

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \geq S$$

$$(2). \quad f_n \leq f_{n+1},$$

$$(3) \quad f_n \rightarrow f \text{ (pointwise)}$$

is not true.

証明,

$$f_n(x) = \inf_{p \in X} \{f(p) + n d(p, x)\}$$

とすると, これが  $p \mapsto f(p)$  の  
条件を満たす. 以下これを  
見ることにする.

step 1,  $p = x$  とすれば  
 $f_n(x) \leq f(x)$  がわかる.

step 2,  $\forall p \in X$  について,

$$f(p) + n d(p, x) \leq f(p) + (n+1) d(p, x)$$

$$\text{よって} \quad f_n \leq f_{n+1}$$

がわかる.

Step 3  $d(p, x) \geq 0 \neq \eta$ .

$$S \leq f(p) \leq f(p) + n d(p, x).$$

とわかるので、  $f_n(x) \geq S$

がわかる。

Step 4 ( $f_n$  の連続性)  $\leq$

$x, y \in X$  と任意に与えらる。

とある、 $\varepsilon > 0$  と任意に与えらる、 $f_n(x)$  の

def がい、 $\varphi \in X$  が存在して

$$f(\varphi) + n d(\varphi, x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

とあり、 $f_n(y)$  の def がい、

$$f_n(y) \leq f(\varphi) + n d(\varphi, y)$$

とある。

これらの式を辺々引き、

三角不等式から

$$\begin{aligned} f_n(y) - f_n(x) &< n(d(x, y) - d(x, x)) - \varepsilon \\ &\leq n d(x, y) - \varepsilon. \end{aligned}$$

を得る。  $\varepsilon$  は任意であるので、

$$f_n(y) - f_n(x) \leq n d(x, y)$$

を得る。 逆に  $x, y$  の  
対称性から

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq n \cdot d(x, y)$$

となるので  $f_n$  は連続である。

(より強く、リプシッツ写像である)  
(このことはよく知られている...)

Steps ( $f_n \xrightarrow{\text{a.s.}} f$   $\varepsilon + \delta \geq \varepsilon$ )

$x \in X$  を任意に与え、このとき、

$f$  の下半連続性が  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 、

$\delta > 0$  が存在して、

$$d(x, y) < \delta \text{ ならば } f(y) > f(x) - \varepsilon$$

と成立する。

②  $p \in X$  について、

①  $d(p, x) < \delta$  ならば、上のことを用いて、

$$f(x) - \varepsilon < f(p) \leq f(p) + h \cdot d(p, x)$$

と成立する。

②  $d(p, x) \geq \delta$  ならば、 $N \in \mathbb{N}$  を

十分大きくとる、

$$f(x) - \varepsilon \leq N \cdot \delta \text{ から } N \geq \frac{f(x) - \varepsilon}{\delta}$$

よりなる。



$n \geq N$  ならば,

$$f(x) - \varepsilon \leq n d(p, x) \leq f(p) + n d(p, x). \\ (\because f > 0)$$

が成り立つ。

上の ① ② から,  $N \in \mathbb{N}$  を十分大きく

とすれば,  $n \geq N$  ならば,  $\forall p \in X$

(2) となる。

$$f(x) - \varepsilon \leq f(p) + n \cdot d(p, x).$$

$$\text{よって, } n \geq N \Rightarrow f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \stackrel{\text{(Step 1)}}{\leq} f(x)$$

よって,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  が成り立つ



# Prop. 3

$M: \text{Cpt, mfd, } f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont.}$

$\epsilon > 0, \exists \delta > 0, C^\infty\text{-map } \gamma \text{ s.t. } f \in$

— 様  $\epsilon$  近い  $\gamma$  になる

$\epsilon \in \mathbb{R}$  任意  $\delta \in \mathbb{R}$

証明)  $\forall a \in M \exists \delta > 0$

$$U_a = \{x \in M \mid |f(x) - f(a)| < \epsilon\}$$

$\gamma$  存在  $\delta > 0, \forall a \in U_a \gamma$

$$M = \bigcup_{a \in M} U_a \quad \gamma \text{ 存在}$$

$\gamma, \gamma \in M$  の  $C^\infty$  構造

$$M = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \quad \gamma \text{ 存在}$$

さ 2, 2 のとき,  $C^\infty$  は単位の分解

$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  が存在して,

$$\text{supp } \lambda_i \subset U_{a_i}$$

とできる。

$$\text{212. } g(x) := \sum_{i=1}^n f(a_i) \cdot \lambda_i(x)$$

と def (よ 50. 2 のとき,  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$

は  $C^\infty$  である,  $\forall x \in M$  について,

$$|f(x) - g(x)| = \left| \sum_{i=1}^n f(x) \lambda_i(x) - g(x) \right|$$

( $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1$  注意)

$$= \left| \sum_{i=1}^n (f(x) - f(a_i)) \lambda_i(x) \right|$$

$$\leq \sum_{x \in U_i} |f(x) - f(a_i)| \lambda_i(x)$$

$$< \varepsilon, \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1 \text{ より}$$

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

(結局  $\|\cdot\|_\infty$  は  $\text{sup}$  ノルム)



Prop. 4

$M: \text{cpt. mfd.}$

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ : 下半連続,

$f \geq s > 0$  とする。  
( $s \in \mathbb{R}$ )

このとき、 $\mathbb{C}^\infty$  関数列  $\{g_n\}_{n=N}^\infty$

(番号から  $N$  が初まりに注意) が存在

して、①  $g_n \leq g_{n+1}$

②  $g_n \rightarrow f$  (各点収束)

③  $g_n > \frac{s}{2}$

④  $g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2n(n+1)}$

を  $\forall x \in X$  で満たす。

( $\because$   $\frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$  に注意せよ)  
( $\& \mathbb{C}^\infty$  つかう。)

① ② ③ ④ を満たす。

证明)

Prop 2. 设连续函数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

满足在  $I$  上  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n \geq s$

则  $f \geq s$ .

证.  $F_n = f_n - \frac{1}{n}$  则  $F_n \geq s - \frac{1}{n}$ .

任取  $\epsilon > 0$ ,  $N > \frac{1}{\epsilon}$  则  $\frac{1}{N} < \epsilon$ .

于是  $n \geq N$  时  $s - \frac{1}{n} > s - \epsilon$ .

$$F_n = f_n - \frac{1}{n} \geq s - \frac{1}{n} > s - \frac{1}{N} > s - \epsilon = \frac{3}{4}\epsilon.$$

于是  $F_n > \frac{3}{4}\epsilon$  则  $f_n > \frac{3}{4}\epsilon + \frac{1}{n}$ .

すなわち  $h$ .

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= (f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &\geq -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore F_{n+1} - F_n \geq \frac{1}{n(n+1)}$$

を得る。

212.  $P \cap P$  より,  $\exists g_n; \infty$

$$\|F_n - g_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}$$

とわかる。これを, 212  $\{g_n\}_{n=N}^\infty$  と定義しよう。

このとき,  $g_n \rightarrow f$

はよくわかる。

残りの条件を

確かめよう。

$$\|F_n - g_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\|F_{n+1} - g_{n+1}\|_\infty < \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$$

より、

$$g_{n+1} - g_n > F_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - F_n - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= (F_{n+1} - F_n) - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\geq \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\geq \frac{1}{n(n+1)} - 2 \cdot \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\therefore g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\left( \because 2 \cdot \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{4n(n+1)} \text{ となるから} \right)$$

※ 2. 注意 12.

$$\begin{aligned} g_n &> F_n - \frac{1}{4n(n+1)} \\ &> \frac{3}{4}S - \frac{1}{n} > \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S \\ &= \frac{1}{2}S. \end{aligned}$$

$$\text{よ、2 } g_n > \frac{1}{2}S.$$

(  $n \geq N > \frac{4}{5}$  に注意せよ。 )

( 同様  $\frac{1}{4n(n+1)} \leq \frac{1}{n}$  を用いた。 )

□



prop 1.5

$$E := \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} a < b, \quad c < d, \\ d - c > \frac{b - a}{2} \end{array} \right\}$$

と def する.  $E$  は  $\mathbb{R}^4$  の 凸 部分 多様体

と する. このとき,  $\mathcal{C}^\infty$ -写像  
(5つの変数に拘らず  $\mathcal{C}^\infty$  とする.)

$$h: \mathbb{R} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, a, b, c, d) \mapsto h(r, a, b, c, d)$$

が存在 (2) 以下をみたす。

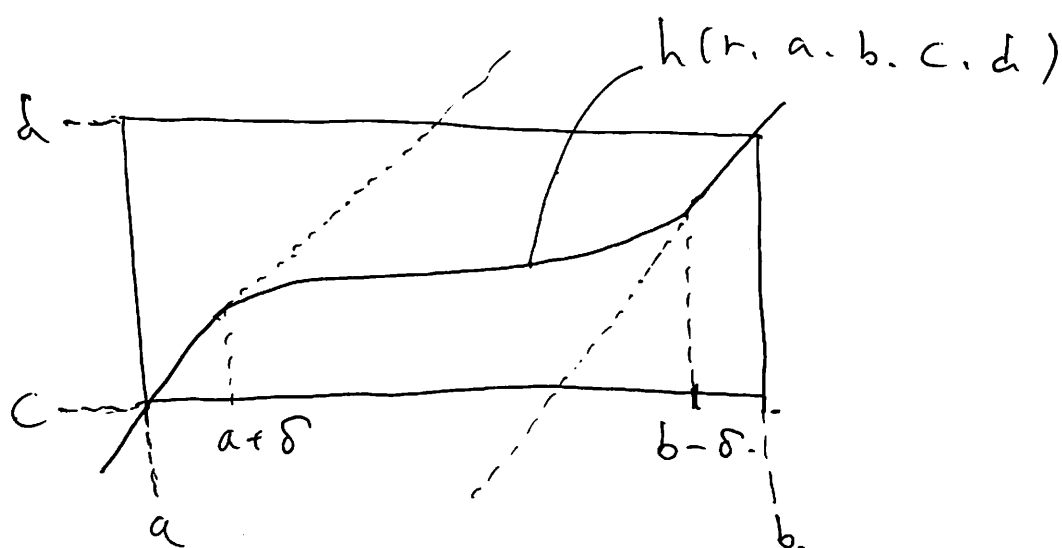
$$\textcircled{1} \quad \partial_r h > 0$$

$$\textcircled{2} \quad h([a, b], a, b, c, d) = [c, d].$$

$$\textcircled{3} \quad \delta = \frac{b-a}{4} \text{ とする.}$$

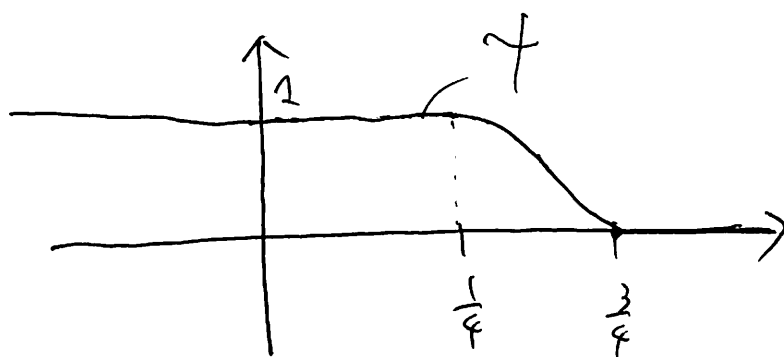
$$x < a + \delta \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r - a) + c$$

$$b - \delta < x \Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r - b) + d.$$



(図)  $h$  の概形。

1/2 証明)  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を、次のように  
 $\infty$ -区間上に作る。



つまり、 $0 \leq \psi \leq 1$ 。

つまり、 $x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \psi(x) = 1$ 。

$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow \psi'(x) < 0$

$\frac{3}{4} \leq x \Rightarrow \psi(x) = 0$ 。

このように  $\psi$  が存在するとは。

多様体の性質を知り、2次元でよくわかる。

2のよう+2  $\psi$  をもつ。2.

$$h(r, a, d, c, d) =$$

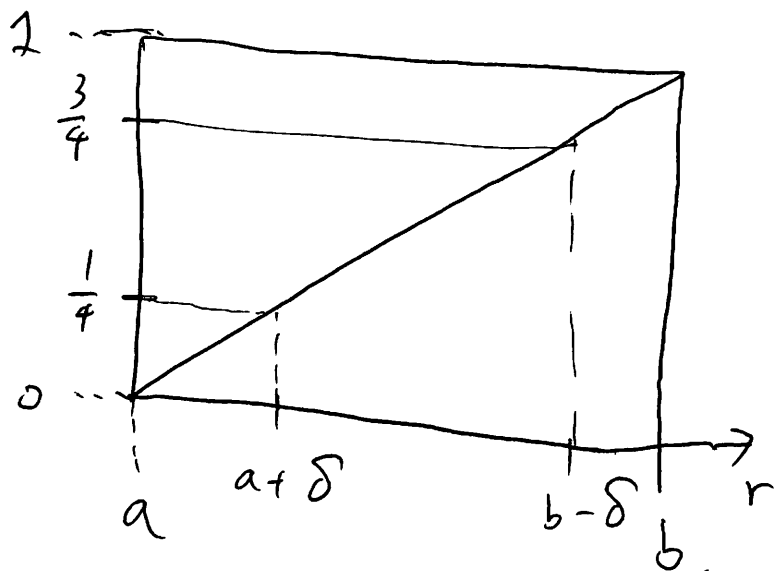
$$\left( \frac{1}{2}(r-a) + c \right) \cdot \psi\left( \frac{r-a}{b-a} \right)$$

$$+ \left( \frac{1}{2}(r-b) + d \right) \cdot \left( 1 - \psi\left( \frac{r-a}{b-a} \right) \right)$$

とすると、 $h$  は求める性質を

満たす。

系から読者のまかせ。



$$\delta = \frac{b-a}{4}$$

等々まで、

$\frac{r-a}{b-a}$  のグラフ。

$\mathbb{R}^n$  内の 2 点、 $a, b \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$\overline{ab} = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

と def する。

Def 6 (星型集合)。

$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $A$  が星型集合で

あるとは、

$$\exists c \in A, \forall x \in A, \overline{cx} \subset A$$

を満たすようにする。

上のような  $c$  を  $A$  の星の中心

と定義する。

Def 7 (星型領域)

$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $A$  は、  
星型でありかつ開集合で  
あるときに 星型領域  
と呼ぶ。

---

以下、星型領域を  
 $\mathbb{R}^n$  の開部分多様体  
とみて、話を進める。

また、

以下では

$$B(x, r)$$

を  $x$  を中心とする  $r$ -開球、

$$F(x, r)$$

を、  $x$  を中心とする  $r$ -閉球

を表わすことにする。

Thm. 8

$\mathbb{R}^n$  内の星型領域は、

$\mathbb{R}^n$  に微分同相。

証明)  $C$  を星型領域とする。

平行移動を力さず  $C$  により、

$C$  の星の中心は、原点  $0$  としてもよい。

また、動径  $r$  が変化する  $\text{diffeo}$

$\mathbb{R}^n \cong B(0, 1)$  の存在から、

$C$  は、有界であるを仮定しても

一般性を失わない。

$\mathcal{C}$  は, open かつ  $0$  の十分小さな  $\varepsilon$ -近傍を含む。(しかし, 適当に  $\mathbb{R}^n$  全体をスカラー-倍する  $\mathcal{C}$  によらず,

$$B(0, 2) \subset \mathcal{C}$$

と仮定 (これもよい。

( $\mathcal{C}$  の有界性も崩れちゃう。)

さ2.  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

と1.  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  を,

$$f(x) = \sup \{ \lambda \geq 0 \mid \lambda \cdot x \in \mathcal{C} \}$$

と def する.

$\mathcal{C}$  のとき 次の  $\mathcal{C}$  が 成立する。



$$\textcircled{1} \quad f \geq 1 \quad (7 \neq 7 \quad S = 1 \text{ なる } z \text{ がある})$$

$$(\because B(0, 2) \subset Z)$$

$\textcircled{2}$   $f$  は下半連続.

$\textcircled{2}$  を示そう.

$x \in S^{n-1}$  と  $\varepsilon > 0$  を任意にとる.

すると  $f$  の定義より  $\exists \lambda > 0$  が存在して

$$\lambda x \in Z \text{ かつ } \lambda > f(x) - \varepsilon$$

とできる.  $\lambda x \in C$  かつ  $\lambda x \in \bigcup_{x \in Z} B(x, \varepsilon)$ .

$C$  が open であるから  $\exists \delta > 0$ ,

$$B(\lambda x, \delta) \subset C \text{ とできる.}$$

$$V = B(x, \frac{\delta}{\lambda}) \cap S^{n-1}$$

とすると  $V$  は  $S^{n-1}$  の open set

である.

$$y \in V, \text{ 任意 } \lambda$$

$$\|x - y\| < \frac{\delta}{\lambda}, \text{ 任意 } \lambda$$

$$\|\lambda x - \lambda y\| = \lambda \|x - y\| < \frac{\delta}{\lambda} \cdot \lambda = \delta.$$

$$\text{よって } B(\lambda x, \delta) \subset \bigcup \mathcal{O}_S,$$

$$\lambda \cdot y \in \bigcup$$

$$\therefore f(y) \geq \lambda.$$

$$\text{つまり, } y \in V \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon,$$

$$\text{よって } f \text{ は下半連続である.}$$

( $f$  は、言わば、動径の函数  
である)

この  $f$  に対して,

prop 4 の  $\{g_n\}_{n=\mu}^{\infty}$  に対して,

$$g_{n+1} - g_n > \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$g_n > \frac{s}{2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right).$$

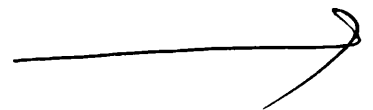
(  $s = 1$  )  
より,

$$g_{\mu} - 0 > \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) - 0 \right)$$

以上を示す。

$\Phi: B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$

を定義する。



$$\Phi(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\|x\|} \cdot h\left(\|x\|, 0, 1 - \frac{1}{N}, 0, g_N\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ \quad \left(x \in F\left(0, 1 - \frac{1}{N}\right) \text{ のとき} \right) \\ \\ \frac{x}{\|x\|} \cdot h\left(\|x\|, 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}, g_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right), g_{n+1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ \quad \left( \begin{array}{l} x \in F\left(0, 1 - \frac{1}{n+1}\right) \setminus B\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) \\ n \geq N \text{ のとき} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

2. 例.  $\Phi$  が 全単射 であることはよくわかる。

$\Phi$  が diffeo であることを示そう。

$\det J\Phi \neq 0$  が示されたい。

木座座  $\Phi$  をつかえば、 $x \neq 0$  かつ、

$$(J\Phi)_x = \left( \begin{array}{c|cccc} \frac{x}{\|x\|} \partial_r h & * & * & \dots & * \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right)$$

と  $\partial_r h$  が  $\neq 0$  かつ、

$\det (J\Phi)_x \neq 0$  が示される。

また、 $0$  の付近では、

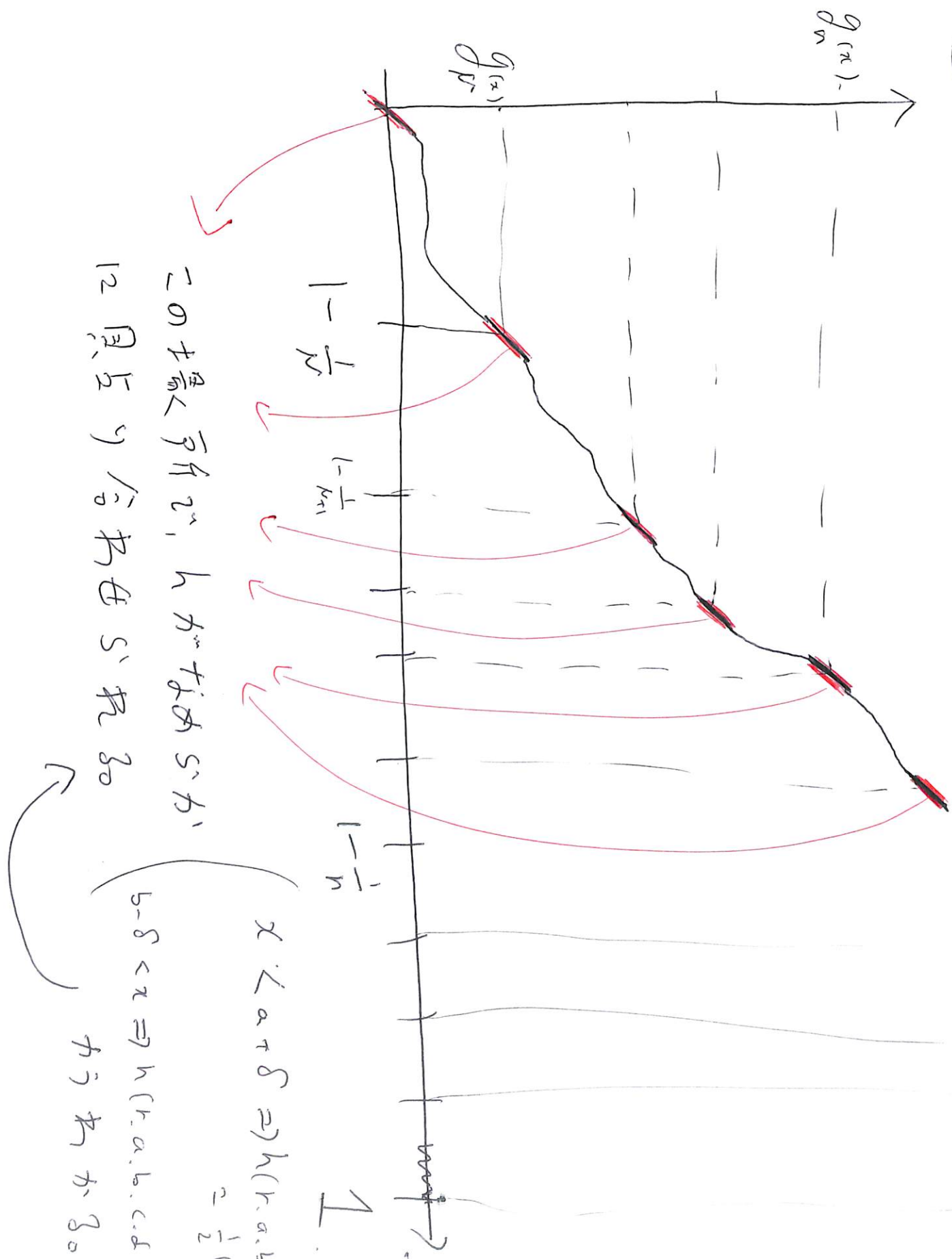
$\Phi(x) = \frac{1}{2} x$  かつ、結局、

$\Phi$  は diffeo である。

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  は diffeo

かつ、結局  $\subset \mathbb{R}^n$  は diffeo である  $\square$

79

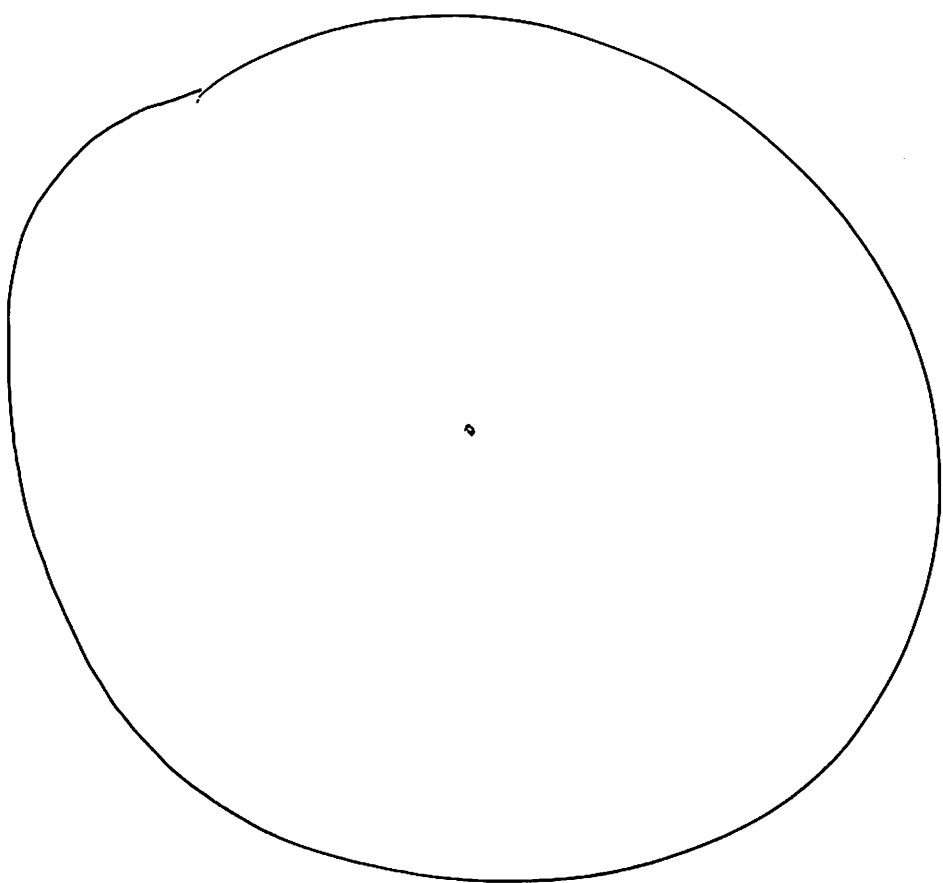


このとき  $\overline{f} \approx 2$ ,  $h$  が  $\frac{1}{2}$  のとき

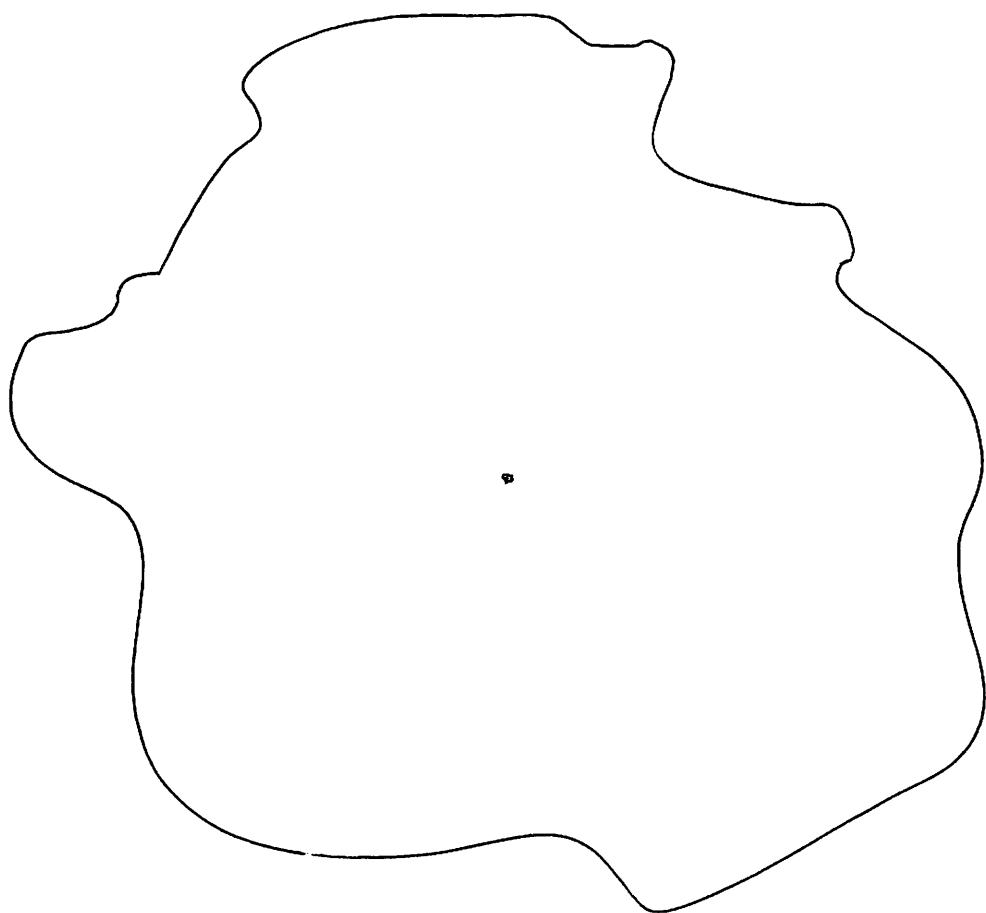
$$\begin{aligned} x < a + \delta &\Rightarrow h(r, a, b, c, d) \\ &= \frac{1}{2}(r - a) + c \\ b - \delta < x &\Rightarrow h(r, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(r - b) + d \end{aligned}$$

からわかる。

⑦ 10

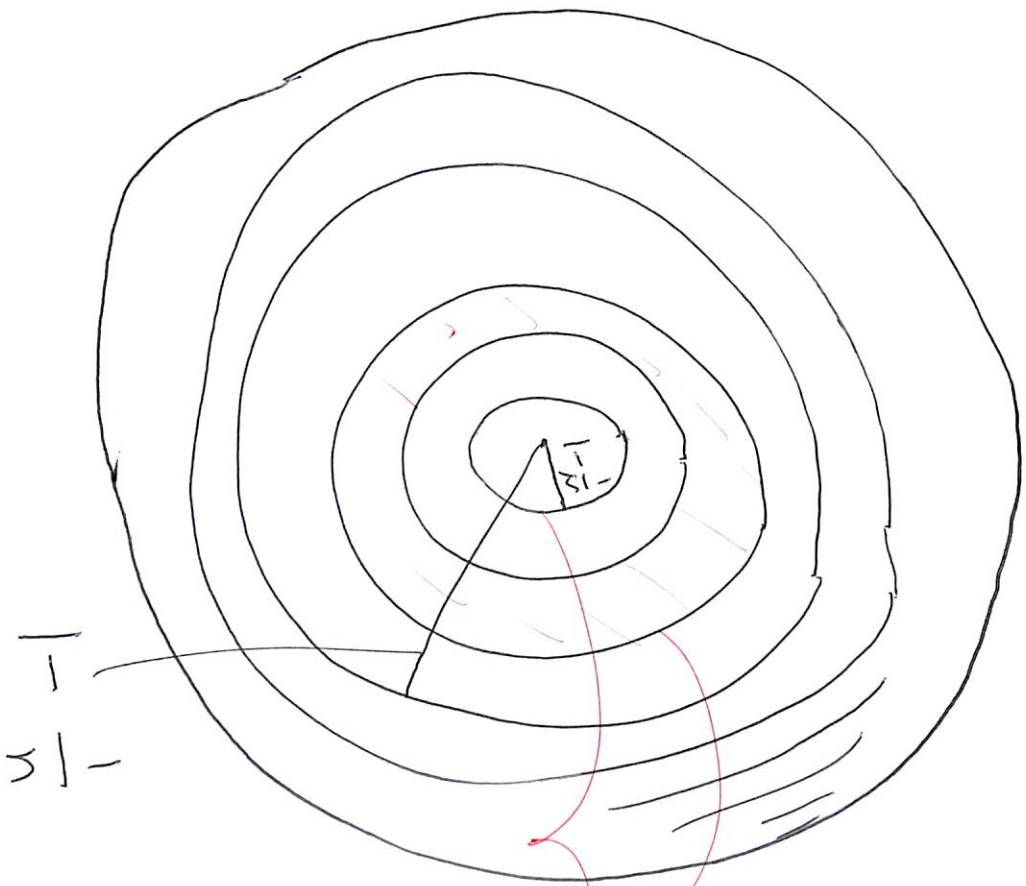


$B(o. 1)$

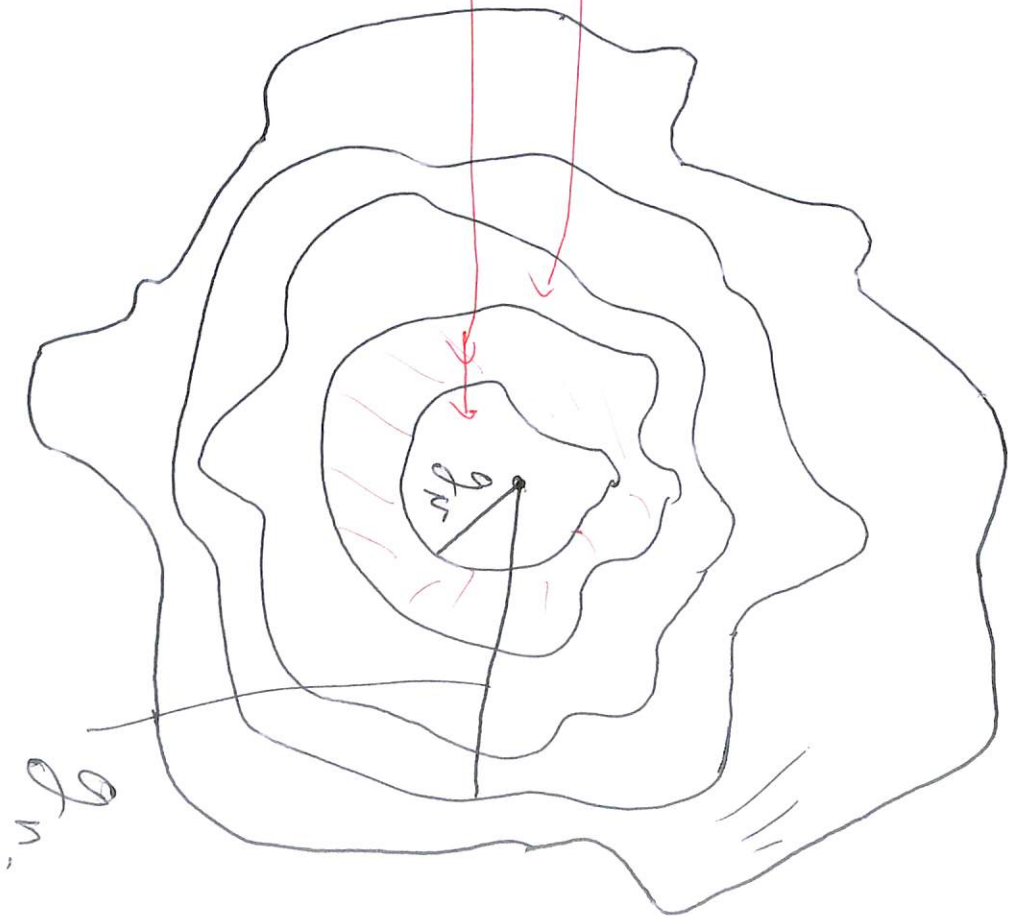


星型領域乙.

19 11



10



$B(0, 1)$

星型領域



# 参考文献

[1] Drink Ferus, Analysis III

<http://page.math.tu-berlin.de/ferus/ANA/Ana3.pdf>

(ドイツ語) 2015年10月閲覧

[2] 松本幸夫, 多様体の基礎, 基礎数学5, 東京大学出版会, 1998.