

電波通信

電波通信

2018 年 8 月 3 日

この文書では有理数と無理数が $\mathbb{R}$ の中で稠密であることを証明する。以下では実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ で床関数を表す。すなわち $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数のことである。この床関数に対して定義から

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

という不等式が成り立ち、これを变形して

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

という不等式を得る。この不等式に留意しておこう。まず有理数の稠密性から証明する。

命題 1. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密である。

証明. $x \in \mathbb{R}$ を任意に与える。このとき自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して床関数の不等式から

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

が分かるので、これを n で割ると

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < x + \frac{1}{n}$$

が分かる、つまり

$$\left| x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

となる。 n を大きくすれば x と $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ はいくらでも距離を近くでき、 $\lfloor nx \rfloor$ が整数であることから $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in \mathbb{Q}$ なので $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ の中で稠密であることが分かる。□

さて、次に移る前に次の簡単な事実に注意しよう。証明は読者に任せる。

事実 2. 有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対し、 $r + \sqrt{2}$ は無理数。

上の事実と有理数の稠密性から無理数の稠密性がわかる。

命題 3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密。

証明. $x \in \mathbb{R}$ を任意に与える。このときもちろん $x - \sqrt{2}$ も実数なので、これに対し命題 1 を適応すると、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $r \in \mathbb{Q}$ が存在し、

$$|(x - \sqrt{2}) - r| = |x - (r + \sqrt{2})| < \varepsilon$$

となり、上の事実から $r + \sqrt{2}$ は無理数であるから、定理の証明は終わる。□