

完全正則空間

一色三良 (conscious77)

2016 年 6 月 15 日

1 序

定義 1 (ゼロ集合、コゼロ集合). 位相空間 X とその上の連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ について f のゼロ集合 $Z(f)$ を

$$Z(f) = f^{-1}(0)$$

と定義し、コゼロ集合 $C(f)$ を

$$C(f) = X \setminus Z(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

と定義する。明らかに $Z(f)$ は X の閉集合で $C(f)$ は X の開集合である。また明らかにゼロ集合の補集合はコゼロ集合で、コゼロ集合の補集合はゼロ集合である。

命題 2. X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像、 $A \subset Y$ を Y のゼロ集合とする。このとき、 $f^{-1}(A)$ は X のゼロ集合である。

証明. $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ を $Z(g) = A$ となる連続関数とする。すると

$$Z(g \circ f) = (g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(A)$$

なので定理は明らかである。 □

双対的に次の命題が成り立つ。

命題 3. X, Y を位相空間、 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像、 $U \subset Y$ を Y のコゼロ集合とする。このとき、 $f^{-1}(U)$ は X のコゼロ集合である。

この命題と $\mathbb{R}$ の開集合はすべてコゼロ集合であることから次の系が得られる。^{*1}

系 4. 位相空間 X と連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に及び $\mathbb{R}$ の開集合 U について $f^{-1}(U)$ はコゼロ集合である。

次の命題はコゼロ集合、ゼロ集合を表現する関数のコドメインをある程度制御出来るという事を保証する地味に便利なものである。

命題 5. 位相空間 X のゼロ集合 A について、ある連続関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$A = Z(g)$$

^{*1} $\mathbb{R}$ は距離空間であり、よって特に完全正則空間なので $\mathbb{R}$ の任意の開集合はコゼロ集合となる。

が成り立つ。

証明. ある連続関数 ϕ によってゼロ集合 A は

$$A = \{x \in X \mid \phi(x) = 0\}$$

と書けるとする。このとき

$$g = \min(1, |\phi|)$$

と置けば g のコドメインは $[0, 1]$ と考える事が出来て、

$$A = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$$

となる。 □

命題 6. 位相位相 X のコゼロ集合 U について、ある連続関数 $g: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して

$$U = C(g)$$

が成り立つ。つまり、 $U = \{x \in X \mid g(x) > 0\}$ である。

証明. 命題 5 と双対的に証明出来る。 □

命題 7. 位相空間 X 上の 2 つの連続関数 $f, g: X \rightarrow [0, +\infty)$ について

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(\max(f, g)), \quad Z(f) \cup Z(g) = Z(\min(f, g))$$

が成り立つ。双対的に

$$C(f) \cup C(g) = C(\max(f, g)), \quad C(f) \cap C(g) = C(\min(f, g))$$

が成り立つ。

証明. 明らか □

系 8. ゼロ集合全体の族は有限個の共通部分及び、有限個の和集合で閉じている。

双対的にコゼロ集合全体の族も有限個の共通部分及び、有限個の和集合で閉じている

命題 9. 位相空間 X のコゼロ集合 U に対して、ゼロ集合の列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ とコゼロ集合の列 $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して任意の $k \in \mathbb{N}$ について

$$O_k \subset F_k \subset O_{k+1}$$

が成立し、さらに

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

が成立する。

証明. コゼロ集合 U は連続関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $U = \{x \in X \mid g(x) > 0\}$ と書ける。そして

$$F_i = \{x \in X \mid g(x) \geq 2^{-i}\} = g^{-1}([2^{-i}, 1])$$

$$O_i = \{x \in X \mid g(x) > 2^{-i}\} = g^{-1}((2^{-i}, 1])$$

と置けば、命題 2,3 から証明は終わる。 □

定義 10 (リンデレフ数). 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して

$$l(\mathcal{U} : X) = \min\{\text{card}(\mathcal{V}) \mid \mathcal{V} \text{ は } \mathcal{U} \text{ の部分被覆}\}$$

と定義する。そして空間 X のリンデレフ数 $l(X)$ を

$$l(X) = \sup\{l(\mathcal{U} : X) \mid \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の開被覆}\}$$

と定義する。ただし、 $l(X)$ が有限になる時は $l(X) = \aleph_0$ と定義し直す。 $l(X) \leq \text{card}(2^X)$ に注意しよう。

$l(X) \leq \mathfrak{m}$ の意味は、 X の任意の開被覆から濃度が高々 $\mathfrak{m}$ の部分被覆が選べるという意味である。

$l(X) = \aleph_0$ となる空間を特にリンデレフ空間という。

命題 11. 位相空間 X とその部分空間 A に対して

$$l(A) \leq l(X)$$

となる。

証明. 明らか □

命題 12.

$$l(X) \leq w(X)$$

証明. $\mathcal{B}$ を X の開基で $\text{card}(\mathcal{B}) = w(X)$ となるものとし、 X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ を与える。そして

$$\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists U \in \mathcal{U} \ B \subset U\}$$

と置く。 $\mathcal{B}$ が開基であることから $\mathcal{Q}$ は開被覆になり、明らかに $\text{card}(\mathcal{Q}) \leq w(X)$ である。そして各 $Q \in \mathcal{Q}$ に対して $Q \subset U_Q$ となる $U_Q \in \mathcal{U}$ を選び、 $\mathcal{V} = \{U_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}}$ と置くと $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の部分被覆で $\text{card}(\mathcal{V}) \leq w(X)$ となる。よって

$$l(\mathcal{U} : X) \leq w(X)$$

となり、 $\mathcal{U}$ は任意であったので

$$l(X) \leq w(X)$$

が成立する。 □

命題 13. $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基とすると $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ となる開基 $\mathcal{D}$ が存在し、 $\text{card}(\mathcal{D}) = w(X)$ を充たす。

証明. $\mathcal{P}$ を $\text{card}(\mathcal{P}) = w(X)$ となる X の開基とする。各 $P \in \mathcal{P}$ について

$$\mathcal{U}_P = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset P\}$$

とすると、 $\mathcal{B}$ が開基であることから $\mathcal{U}_P$ は P の開被覆であり、 $l(P) \leq l(X) \leq w(X)$ から $\text{card}(\mathcal{V}_P) \leq w(X)$ となる $\mathcal{U}_P$ の部分被覆が存在する。さて、これを用いて

$$\mathcal{D} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{V}_P$$

と置けば明らかに $\text{card}(\mathcal{D}) = w(X)$ で $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ が成り立ち、 $\mathcal{P}$ が開基であることから $\mathcal{D}$ の開基になる。 □

2 完全正則空間

定義 14 (完全正則空間). 点 p とその点を含まない閉集合 C との任意の組 (p, C) が関数で分離出来る。つまり任意の組 (p, C) に対してある実連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ で

$$p \in f^{-1}(0), C \subset f^{-1}(1)$$

を満たすものが存在するとき、その空間を完全正則であると言う。また、完全正則でかつ T_1 であるような空間を $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間もしくは $T_{3.5}$ 空間と呼ぶ。

上と同じ記号を用いると、 $p \in f^{-1}([0, \frac{1}{2}), f^{-1}([0, \frac{1}{2}) \cap C = \emptyset$ で $f^{-1}([0, \frac{1}{2})$ は X の開集合なので完全正則空間は正則空間である。よって $T_{3.5}$ 空間は T_3 空間である。

命題 15. $\mathcal{C}$ を完全正則空間 $(X, \mathfrak{D})$ から単位閉区間 $[0, 1]$ への連続関数全体とする。このとき、完全正則空間の位相は $\mathcal{C}$ から定まる始位相 $(X, \mathfrak{I}(\mathcal{C}))^{*2}$ と一致する。また逆に $\mathfrak{I}(\mathcal{C}) = \mathfrak{D}$ となる位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ は完全正則空間である。

証明. $\mathcal{C}$ の元は $(X, \mathfrak{D})$ の連続関数なので明らかに

$$\mathfrak{I}(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{D}$$

が成立する。逆向きの包含関係を示そう。 $U \in \mathfrak{D}$ で $x \in U$ とすると、 $X \setminus U$ は $(X, \mathfrak{D})$ の閉集合で p を含まないので X の完全正則性から連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ で

$$p \in f^{-1}(0), X \setminus U \subset f^{-1}(1)$$

となるものが存在する。 $\mathcal{C}$ の定義から明らかに $f \in \mathcal{C}$ で

$$p \in f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \subset U$$

なので $f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \in \mathfrak{I}(\mathcal{C})$ から

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{I}(\mathcal{C})$$

なので命題の前半が示された。後半は系 8 から明らかである。 □

次の始位相に関する埋め込み定理を思い出そう。

事実 16 (始位相の埋め込み定理). 位相空間 $(X, \mathfrak{D})$ には $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から定まる始位相が入っているとしこの関数族の終域を $\{(Y_\lambda, \mathfrak{D}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ とするこのとき関数

$$\phi: X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda; x \mapsto (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$$

について $\mathfrak{I}(\mathcal{F}) = \mathfrak{I}(\phi)$ が成立する。また ϕ が単射ならばこれは埋め込みになっているつまり $(X, \mathfrak{D})$ は $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ の部分空間 $\phi(X)$ と同相となる。

*2 この文書では関数族 $\mathcal{A}$ から誘導される始位相を $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ と書くことにする。

証明は電波通信の記事にあると思う。

この埋め込み定理と先の命題から次のことが直ちに従う。記号は上のものと同じとする。

定理 17. $T_{3.5}$ 空間 X は

$$\phi : X \rightarrow \prod_{f \in \mathcal{C}} [0, 1]; x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}}$$

によって $\prod_{f \in \mathcal{C}} [0, 1] = [0, 1]^{\mathcal{C}} = I^{\mathcal{C}}$ に埋め込める。

定義 18. $T_{3.5}$ 空間 X のストーンチェックコンパクト化 βX を

$$\beta X = CL_{I^{\mathcal{C}}}(\phi(X))$$

と定義する。

参考文献

- [1] 森田紀一, 位相空間論, 岩波全書 331, 岩波書店 1981
- [2] M.G.Murdeswar, general topology, Wiley Eastern Limited, 1983