

可算コンパクトなメタコンパクト空間はコンパクト

一色三良 (conscious77)

2018 年 8 月 3 日

この文章では可算コンパクトなメタコンパクト空間がコンパクトであることを紹介する。

参考文献 [1] では T_1 を仮定し、これを証明しているが参考文献 [2] では T_1 を仮定せずとも証明できることが注意されている。

以下の文書では位相空間に如何なる分離公理も課さない。

定義 1. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ と X の点 x について $\deg(x; \mathcal{A})$ を

$$\deg(x; \mathcal{A}) = \text{card}\{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\}$$

と定義する。これを $\mathcal{A}$ に対する x の度数という。

定義 2. 集合 X の被覆 $\mathcal{U}$ について任意の点 x について $\deg(x; \mathcal{U})$ が有限となるときの、 $\mathcal{U}$ を X の点有限被覆という。

定義 3. 位相空間 X についてその任意の開被覆に点有限被覆となる開細分が存在するとき X をメタコンパクト、もしくは弱パラコンパクトと言う。明らかにパラコンパクト空間はメタコンパクトである。

定義 4 (既約被覆). 集合の被覆が既約被覆であるとは、その真に小さい部分族が被覆を成さないときに言う。

命題 5. 点有限被覆には既約部分被覆が存在する。

証明. 集合 X の点有限被覆を $\mathcal{U}$ とし、

$$\mathbf{C} = \{A \mid A \subset \mathcal{U}, A \text{ は } X \text{ の被覆}\}$$

とおく。このとき $\mathbf{C}$ には包含関係により順序が備わっている。 $\mathbf{C}$ の極小元が既約被覆であることに注意しよう。以下では $\mathbf{C}$ が Zorn の補題の仮定を充すことを確かめる。 $\mathbf{I}$ を $\mathbf{C}$ の全順序部分集合とする。このとき $\bigcap \mathbf{I}$ が $\mathbf{I}$ の下界になることを見よう。そのためにはこれが X の被覆になっていることを示せば良い。 $x \in X$ を任意に取ろう。そして x が属する $\mathcal{U}$ の元を $U_1, U_2, \dots, U_s$ ($s = \deg(x; \mathcal{U})$) としよう。このうちのどれか一つは $\mathbf{I}$ の全てに属している。もしそうでないとするとある $A_1, A_2, \dots, A_f \in \mathbf{I}$ が存在して、 $V_i \notin A_i$ となるが、 $B = \min\{A_1, A_2, \dots, A_f\} \in \mathbf{I}$ と置くと、任意の V_i について $V_i \notin B$ となる。よって $x \notin \bigcup B$ となり、 B が被覆であることに矛盾する。 $\square$

定理 6 (Arens-Dugundji). 可算コンパクトかつメタコンパクトな空間はコンパクトである。

証明. X には既約被覆 $\mathcal{U}$ で $\text{card}(\mathcal{U}) = \infty$ となるものが存在するとしよう。 $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ としよう。ここで添え字付けは単射とする。 A は無限集合なので $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる。ここで添え字付けは単射とする。そして

$A_n = A \setminus \{a_i \mid i \geq n\}$ として

$$E_n = X \setminus \bigcup_{a \in A_n} U_a$$

と定義しよう。すると

$$E_n \supset E_{n+1}$$

であり、既約性から $E_n \neq \emptyset$ である。そして点有限性から

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \emptyset$$

なので X は可算コンパクトではない。以上から対偶を考えて X が可算コンパクトならば、既約被覆は有限被覆になる。よってメタコンパクトな可算コンパクト空間はコンパクトになる。 $\square$

参考文献

- [1] R.Arens and J.Dugundji. *Remark on the concept of compactness*, Portugal.math.9(1950), 141-143
- [2] J.Greever, *On Some Generalized Compactness Properties*, Publ.RIMS. Kyoto Univ.Ser. A Vol 4(1968),39-49